

Mitschrift zur Vorlesung
„Einführung in die Kommunikationstechnik“
von Dr.-Ing. Helmut Bresch

Max Dünnwald
Alexander Seelig

8. Februar 2016

Wintersemester 2015/16

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	4
0.1	Kommunikation	4
0.1.1	Definition	4
0.1.2	Übertragungsarten	4
0.1.3	Multiplexverfahren	4
0.2	Kommunikationskette	5
0.2.1	A: Quelle	5
0.2.2	B: Wandler	6
0.2.3	C: Sender	7
0.2.4	D: Wandler 2	8
0.3	Übertragungskanäle	9
0.3.1	NF-Kabel (Niederfrequenzkabel)	10
0.3.2	Koaxialkabel	10
0.3.3	Glasfaser	11
0.3.4	Beispiele verschiedener Übertragungsfrequenzen:	11
1	Darstellung von Signalen	12
1.1	Periodische Signale	12
1.1.1	Zeigerdarstellung	13
1.1.2	Darstellung einer harmonische Schwingung in Phasendarstellung	13
1.1.3	Abtasttheorem	14
1.1.4	Periodische Signale und Fourier-Reihe	14
1.1.5	Überführung der Fourier-Reihe ins Fourier-Integral	17
1.2	Allgemeine Eigenschaften der Fourier-Transformation	19
1.2.1	Ableitung und Integration im Zeitbereich	20
1.2.2	Modulationseigenschaft	20
1.3	Modulationsverfahren mit zeitkontinuierlichen Träger	22
1.4	Zeitverzögerung	23
1.4.1	Dirac-Delta-Funktion	24
1.5	Faltung	25
2	Die Übertragungsfunktion	26
2.1	Die Übertragungsfunktion	26
2.1.1	Differenzialgleichungen (DGL) zur Beschreibung im Zeitbereich	26
2.1.2	RC-Glied (System 1. Ordnung)	26
2.1.3	LC-Glied (System 2. Ordnung)	27
2.1.4	Frequenzgang einer NF-Leitung (niederfrequent)	27
2.2	Bestimmung der Übertragungsfunktion eines Systems	28
2.3	Die Impuls-Antwort eines Systems	28
2.4	Filter	29
2.4.1	Ordnung eines Filters	29
2.4.2	Klassifizierung von Filtern	30
2.4.3	ideale Filter	31
2.4.4	realisierbare Filter	32
3	Deterministische und stochastische Vorgänge	35
3.1	Energie- und Leistungssignale	35
3.2	Zusammenfassung	36
3.2.1	Energieisignale	36

3.2.2	Leistungssignale	37
3.3	Rauschen	37
3.3.1	Einleitung - ein geschichtlicher Exkurs	37
3.3.2	Thermisches Rauschen	37
3.3.3	Schrottrauschen	39
3.3.4	Quantisierungsrauschen	39
3.3.5	Gefärbtes Rauschen	40
3.4	Kenngößen des Rauschens	40
4	Digitale Informationsübertragung	41
4.1	Einleitung	41
4.2	Die Abtasttheorie	42
4.2.1	Gleichanteil	44
4.3	Die Puls-Code-Modulation (PCM)	45
4.3.1	AD-Wandlung: Quantisierungskennlinien	45
4.3.2	Kenngößen	46
4.3.3	Wandlerkennlinien	46
4.3.4	Quantisierungsrauschen	47
4.3.5	Das Tiefpassfilter	48
4.3.6	Sample and Hold (Abtast- und Halteschaltung)	48
4.3.7	Codierung	50
5	Wiederholungsübung Kapitel 4	52
5.1	Abtastung	52
5.1.1	Frequenzspektrum eines Sprachsignals	52
5.2	Pulscodemodulation (PCM)	52
5.2.1	PCM Übertragungssystem	52
5.2.2	AD-Wandler	52

0 Einleitung

0.1 Kommunikation

0.1.1 Definition

Kommunikation ist der Austausch oder die Übertragung von Informationen.

0.1.2 Übertragungsarten

Es werden drei Richtungsunabhängigkeiten unterschieden:

Simplex: Daten können in nur eine Richtung übertragen werden. Diese Technik ermöglicht keine Antwort.
Beispiel: Radio

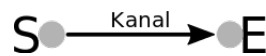


Abbildung 1: Simplex-Übertragung vom Sender zum Empfänger

Halbduplex: Daten können abwechselnd, aber nicht gleichzeitig, in beide Richtungen fließen
Beispiel: Walky Talky

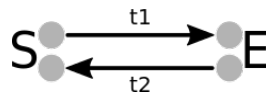


Abbildung 2: Halbduplex-Übertragung abwechselnd zwischen Sender und Empfänger

Vollduplex: Daten können in beide Richtungen gleichzeitig übertragen werden.
Beispiel: Telefon

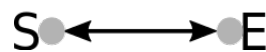


Abbildung 3: Vollduplex-Übertragung simultan zwischen Sender und Empfänger

0.1.3 Multiplexverfahren

Multiplexverfahren sind Methoden zur Signal- und Nachrichtenübertragung, bei denen mehrere Signale zusammengefasst (gebündelt) und simultan über ein Medium (Leitung, Kabel oder Funkstrecke) übertragen werden. Wir unterscheiden zwei Verfahren: **Zeitmultiplex:**

Diese Technik ist heute weit verbreitet bzw. wird häufig verwendet, z.B. bei Telefon, Internet. Dabei werden in bestimmten Zeitabschnitten (Zeitschlitz) die Daten (Signale) verschiedener Sender auf einem Kanal übertragen.

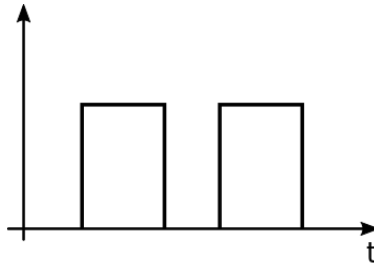


Abbildung 4: Zeitfunktion eines Zeitmultiplexers: pro Übertragungskanal ist ein fester Zeitschlitz

Frequenzmultiplex:

Hierbei werden mehrere Signale auf je eine eigene Trägerfrequenz moduliert und anschließend zusammengefasst. Beim Empfänger muss das Signal wieder demoduliert werden.

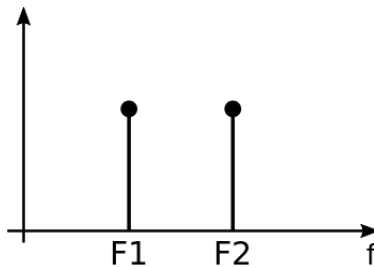


Abbildung 5: Spektrum der Trägerfrequenzen bei einem Frequenzmultiplex-Verfahren

0.2 Kommunikationskette

Die an einer Kommunikation beteiligten Elemente bilden eine Kommunikationskette. Dabei kann z.B. die **Quelle** ein Sprachsignal von einem Menschen sein und die **Senke** das Ohr eines anderen.

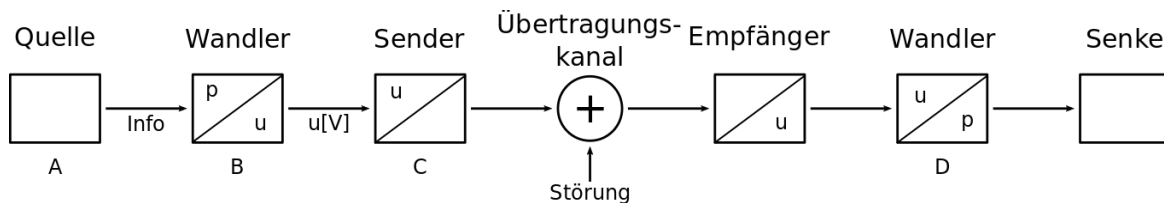


Abbildung 6: Kommunikationskette: von der Quelle zur Senke



Prüfungsfrage: Erläutern Sie den Aufbau einer Kommunikationskette!

Antwort: Zusammenhänge aus Kapitel 0.2 erläutern.

0.2.1 A: Quelle

Gängige Frequenzbereiche:

- Sprache: 16Hz – 16kHz
- Telefon: 300Hz – 3.4kHz

Es werden meistens 5V als Signalspannung verwendet.

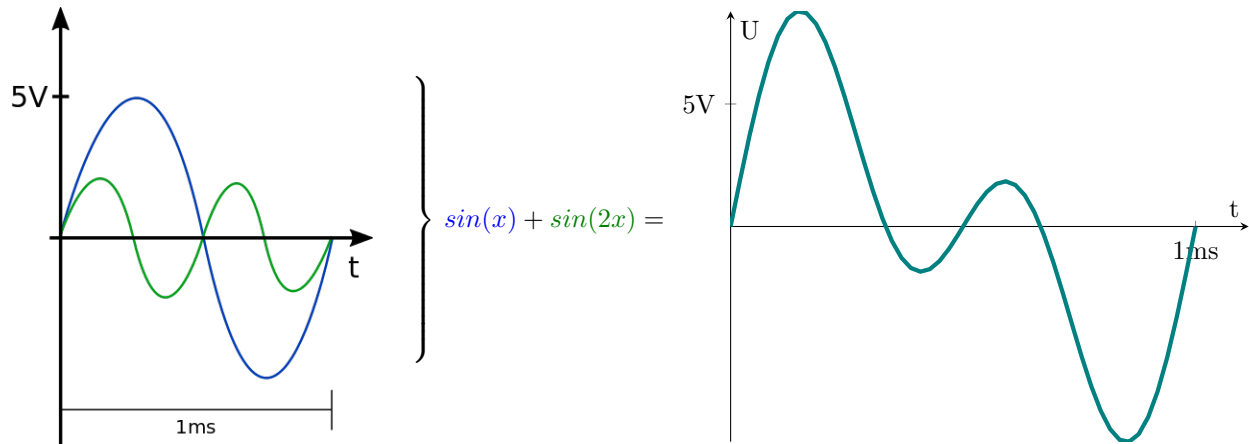


Abbildung 7: Beispiel Signaladdition: Sinuston mit $f = 1 \text{ kHz}$, $T = 1 \text{ ms}$)

Im **Spektrum** lassen sich sofort alle beteiligten Schwingungen betrachten.

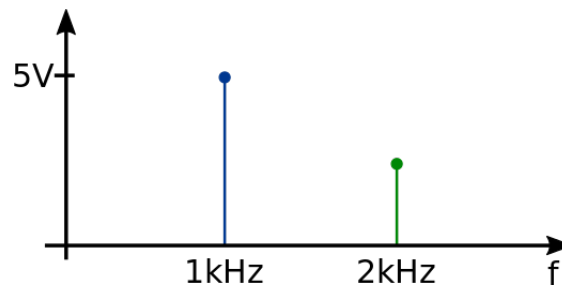


Abbildung 8: Spektrum des aus Abbildung 7 resultierenden Signals

0.2.2 B: Wandler

- Druck-Spannungswandler
- p: Schalldruck
- z.B. Mikrophon
- Wandlerkennlinie:

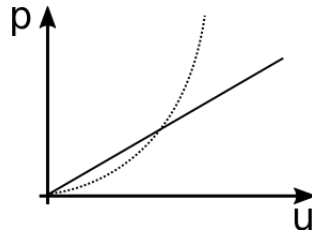


Abbildung 9: Wandlerkennlinie

Lineare Kennlinien sind zu bevorzugen. Da lineare Bauteile dem *Superpositionsprinzip* genügen, gibt es keine Verzerrungen bzw. Interferenzen.

Beim Anlegen eines Eingangssignals etwa, das die Summe aus zwei zuvor begutachteten Signalen bildet, lässt sich feststellen, dass die Reaktion am Ausgang der Addition der beiden einzelnen Antworten entspricht, wenn das System linear ist.

- Wandlergleichung:
 - $y = x \cdot k$
 - hier: $u = p \cdot k$
 - k: Wandlerkonstante

0.2.3 C: Sender

Ein Sender wandelt Spannung in ein optisches, elektrisches Signal oder in ein Funksignal, das anschließend übertragen werden kann.

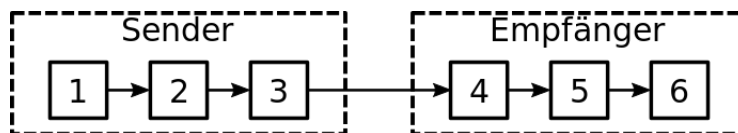


Abbildung 10: Kommunikationskette: vom Sender zum Empfänger (vgl. Abb. 6)

1. Quellcodierung

- Abbildung von Zeichen auf andere
- häufig vorkommende Zeichen werden kürzer codiert (auf kürzere Zeichen abgebildet) als weniger häufigere (Beispiel: Morsezeichen)
- Komprimierung der Daten

2. Kanalcodierung

Überprüfung auf Übertragungsfehler, z.B. mit

- Paritätsprüfung (Paritätsbit)
- CRC (Zyklische Redundanzprüfung) ist ein Verfahren zur Bestimmung eines Prüfwerts für Daten, um Fehler bei der Übertragung oder Speicherung erkennen zu können

3. Modulation

- Vorgang, bei dem ein zu übertragendes Nutzsignal das Trägersignal verändert (moduliert)
- ermöglicht z.B. hochfrequente Übertragung niedrigerfrequenter Daten
Schreien im Wald vs. Übertragung Radio
- siehe auch Abschnitt 1.2.2 und 1.3

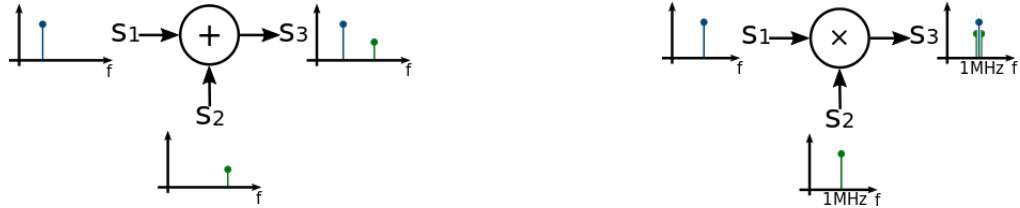


Abbildung 11: Modulation: Nutzsignal S_1 moduliert Trägersignal S_2 zu S_3

4. Demodulation
5. Kanaldecodierung
6. Quelldecodierung

0.2.4 D: Wandler 2

z.B. Lautsprecher

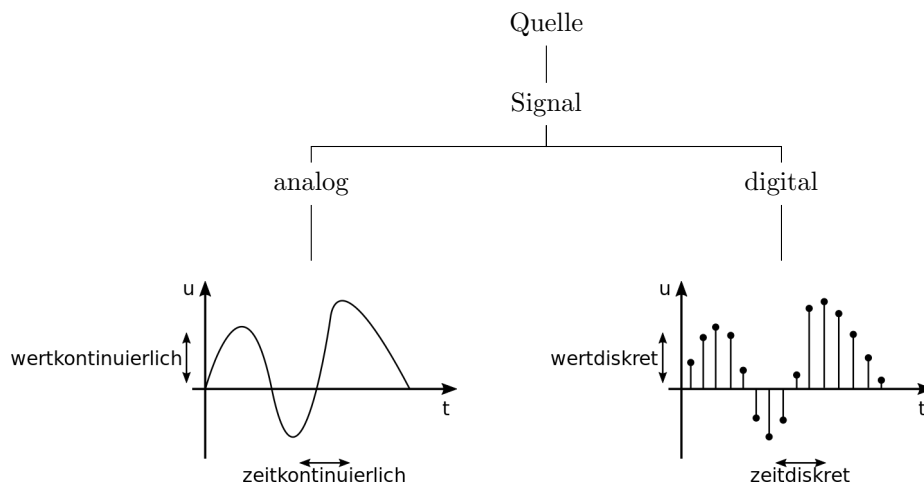


Abbildung 12: Unterschiede analoger und digitaler Signale

0.3 Übertragungskanäle

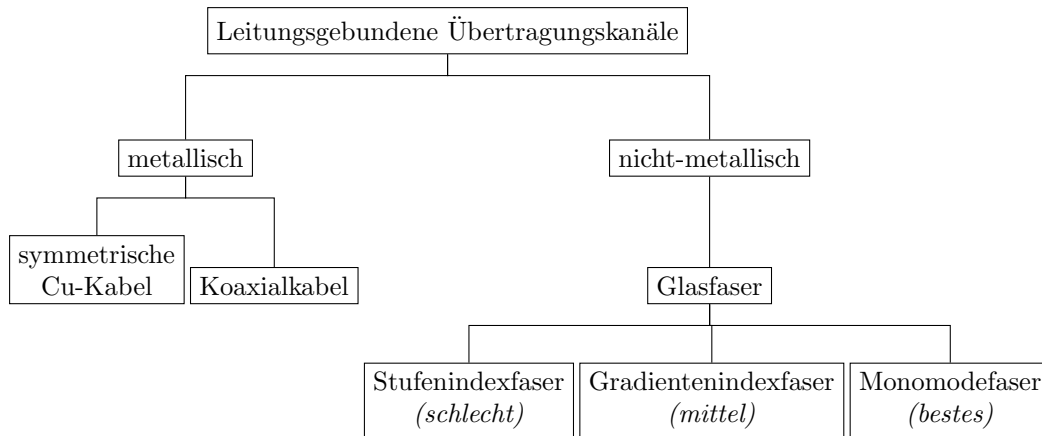


Abbildung 13: Leitungsgebundene Übertragungskanäle

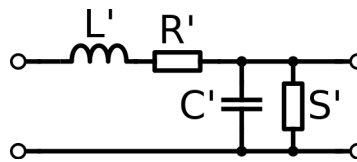


Abbildung 14: Vollständiges Ersatzschaltbild für Kabel

C':

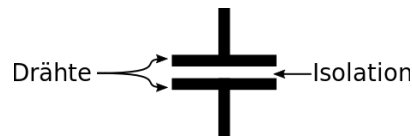


Abbildung 15: Im Kabel parallel verlaufende Drähte wirken wie Kondensatorplatten

- Kapazität im Bereich von nF, pF (Milliardstel bzw. Billionstel)
- Isolation des Kabel wirkt wie Dielektrikum (nicht-leitendes Material zwischen den Kondensatorplatten)

R':

- $\rho \cdot \frac{L}{A}$ mit ρ : spezifischer Widerstand; L: Länge; A: Durchschnittsfläche
- $\rho \left[\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \right]$
 - $\rho_{Au} = 0,015$
 - $\rho_{Cu} = 0,01786$
 - $\rho_{Al} = 0,0278$

- Bsp.:
 $L = 100m; \varnothing = 0,5mm \rightarrow A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$ (bei kreisrunder Fläche)
 $\rightarrow R = 4,55\Omega$

0.3.1 NF-Kabel (Niederfrequenzkabel)

für Frequenzen $f < 100kHz$ (z.B. Telefonkabel, 4,4km, 3,4kHz)

Die Abschirmung elektrotechnischer Geräte, Einrichtungen und Räume dient dazu, elektrische und/oder

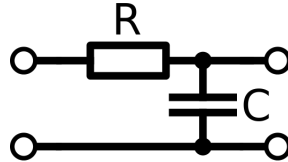


Abbildung 16: Ersatzschaltbild für Niederfrequenzkabel

magnetische Felder von diesen fernzuhalten oder umgekehrt die Umgebung vor den von der Einrichtung ausgehenden Feldern zu schützen. Drähte in einem Kabel können mithilfe abschirmender Materialien abgeschirmt werden.

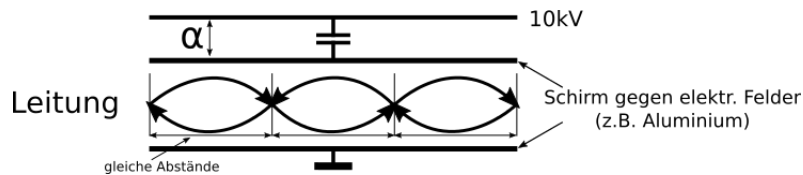


Abbildung 17: Abschirmung einer elektrotechnischen Leitung

Die Erdung dient als Schutz vor Überspannung (z.B. Blitz). Dabei darf es nur *eine* Erdung geben! Durch die *Verdrillung* (Verflechtung mit gleichen Abständen) wird das magnetische Feld abgeschwächt. Der Schirmdämpfungsfaktor als Maß für die Effektivität einer Abschirmung a berechnet sich wie folgt:

$$a = 20 \cdot \lg \left(\frac{u_1}{u_2} \right) \quad // \text{Einheit : dB}$$

0.3.2 Koaxialkabel

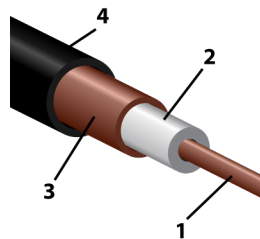


Abbildung 18: 1. Seele oder Innenleiter, 2. Isolation oder Dielektrikum zwischen Innenleiter und Kabelschirm, 3. Außenleiter und Abschirmung, 4. Schutzmantel

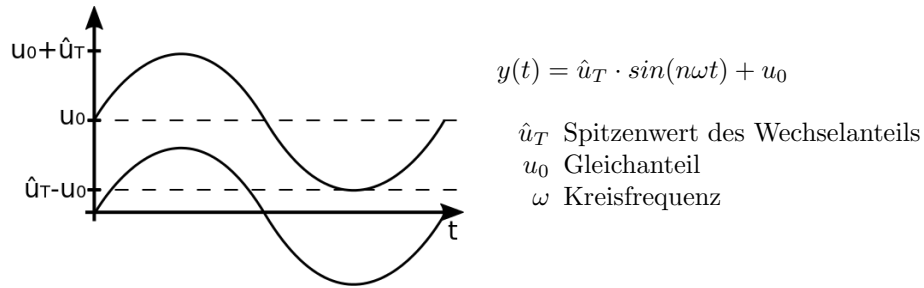


Abbildung 19: Mischspannung in einem Koaxialkabel

Bei einem Koaxialkabel kann die Betriebsspannung als Gleichanteil u_0 mit übertragen werden. So können z.B. Mikrofone betrieben werden. Sie werden auch beim TV eingesetzt (30 MHz).

0.3.3 Glasfaser

- ermöglicht hohe Bandbreite (mehrere Kanäle auf einmal) bei geringer Dämpfung (gemessen in $\frac{dB}{km}$)
- physikalische Grundlage: Totalreflexion (innerhalb der Leitung)
- Sender: LED, Laserdioden
- Empfänger: lichtempfindliche Dioden
- Wiederholung: Zeit-/Frequenzmultiplex (siehe Kapitel 0.1.3)
- $T = 1\mu s \rightarrow 1MHz, 1ns \rightarrow 1GHz$
 \Rightarrow die Menge der Informationen kann 1000 mal erhöht werden (Frequenzen entsprechen der Bandbreite für die Übertragung)

0.3.4 Beispiele verschiedener Übertragungsfrequenzen:

Prüfungsfrage: Nennen Sie die Frequenzbereiche!

Antwort:

- LW: 100 kHz (AM) (größte Übertragungsreichweite)
 - MW: 1 MHz (AM)
 - KW: 10 MHz (AM)
 - uKW: 100 MHz (FM) (geringste Übertragungsreichweite)
- // Merkhilfe: LW $\xrightarrow{\cdot 10}$ MW $\xrightarrow{\cdot 10}$ KW $\xrightarrow{\cdot 10}$ uKW
- TV: 30 MHz
 - UHF: 300 MHz
 - Mobilfunk: 900 MHz, 1800 MHz
 - WLAN: 2.4 GHz, 5.4 GHz



1 Darstellung von Signalen

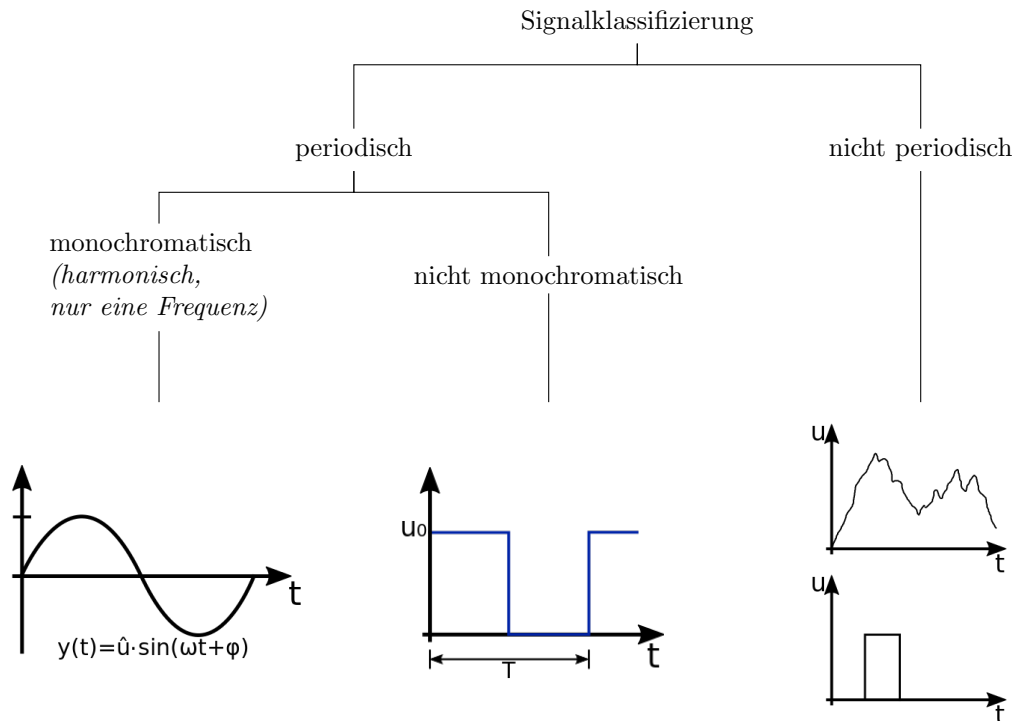


Abbildung 20: Klassen von Signalen

1.1 Periodische Signale

Definition: Ein Signal $x(t)$ bezeichnet man dann und nur dann als *periodisch*, wenn für alle beliebigen Werte von t und alle ganzzahligen Werte von i gilt:

$$x(t + i \cdot T_0) = x(t)$$

Periodische Funktionen sind für die Nachrichtentechnik von großer Bedeutung:

- als Trägerfrequenz für Modulation,
- zur Synchronisation/Taktgebung bei digitalen Systemen,
- als Test- und Prüfungssignale bei Systemrealisierung.

Sie gehören zur Klasse der deterministischen Signale, deren Zeitfunktion in analytischer Form angegeben werden kann; d.h. der Signalverlauf ist für jede Zeit t bekannt.

Signalparameter:

- Signalamplitude
- Effektivwert u_e
- Spitzenwert \hat{u}

- Periodendauer T_0 (kleinstmöglicher Wert, der die obige Gleichung erfüllt)
- Grundfrequenz $f_0 = \frac{1}{T_0}$ (Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit (meist Sekunden \rightarrow [Hz]))
- Grundkreisfrequenz ω_0 (Winkeldrehung pro Zeiteinheit): $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

1.1.1 Zeigerdarstellung

Eine komplexe Zahl kann auch durch ihren *Betrag* ($|z|$) und ihre *Phase* (ϕ) dargestellt werden:

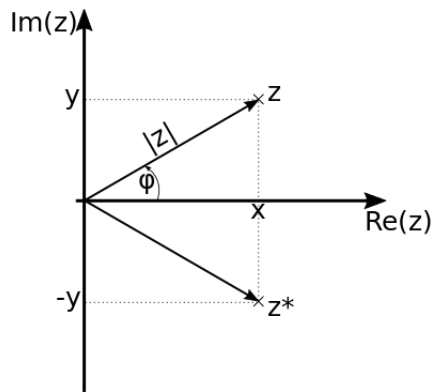


Abbildung 21: Zeigerdarstellung komplexer Zahlen

$$\begin{aligned}
 |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
 x &= |z| \cdot \cos(\phi) \\
 y &= |z| \cdot \sin(\phi) \\
 \Rightarrow z &= |z| \cdot \cos(\phi) + j \cdot |z| \cdot \sin(\phi)
 \end{aligned}$$

Nach dem *Satz von Euler* weist $\exp(j\phi)$ einen *Re* · cos und einen *Im* · sin Anteil auf, daher gilt auch

$$z = |z| \cdot e^{j\phi}$$

Zur Erinnerung: die konjugiert Komplexe einer Zahl z hat einen negativen Imaginärteil:

$$z^* = x - j \cdot y = |z| \cdot e^{-j\phi}$$

1.1.2 Darstellung einer harmonische Schwingung in Phasendarstellung

- Projektion des rotierenden Phasors auf reelle Achse stellt $f_{mc}(t)$ (eine monochromatische Funktion) dar
- Amplitude entspricht Lautstärke
- Frequenz entspricht Tonhöhe

Beim Halbieren der Amplitude (Spannung), nimmt die Leistung um den Faktor 4 (noch $\frac{1}{4}$) ab, da $P = \frac{u^2}{R}$
 Das heißt für die Dämpfung $a = 20 \cdot \lg\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$

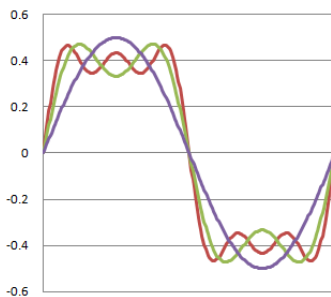
1.1.3 Abtasttheorem

Das Abtasttheorem besagt, dass die Taktfrequenz der punktwisen Probeentnahme (samples) aus dem Ursprungssignal mehr als doppelt so hoch wie die höchste im Ursprungssignal enthaltene Frequenz f_{signal}

$$f_{abtast} > 2 \cdot f_{signal}$$

Falls dieses Kriterium nicht eingehalten wird, entstehen nichtlineare Verzerrungen, die auch als Alias-Effekt bezeichnet werden. Diese lassen sich nicht wieder vollständig herausfiltern, sondern lediglich abschwächen (z.B. Anti-Aliasing-Filter)

Für Rechteckimpulse wird die 10 bis 20-fache Abtastrate empfohlen, da Rechtecksignale aus unendlich vielen Frequenzen zusammengesetzt sind. Je kleiner die Abtastrate, desto mehr Frequenzanteile werden abgeschnitten und so das Signal verzerrt.



Je höher die Abtastfrequenz, um so besser nähert sich das wiederhergestellte Signal dem originalen Rechteckimpuls an.

Abbildung 22: Abtasten eines Rechtecksignals mit unterschiedlichen f_{abtast} .

Prüfungsfrage: Welche Abtastfrequenz bei 100Hz Sinus- und 100Hz Rechtecksignal ist nötig?

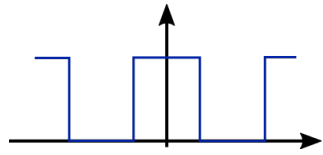


Antwort: Für das Sinussignal würden 200Hz reichen (Shannonsches Abtasttheorem), aber das Rechtecksignal muss mit Fourier (aus Summe periodischer Signale) erzeugt werden. Bei doppelter Abtastung entstünde ein Dreiecksignal! Daher ist hier die **10 bis 20-fache Frequenz** des abzutastenden Signals angebracht.

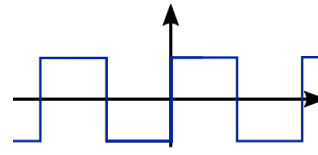
Nachfrage: Wie sieht das Spektrum eines Rechteckimpulses aus (diskret/kontinuierlich)?

1.1.4 Periodische Signale und Fourier-Reihe

Zur Erinnerung:



gerade Funktion: $x_g(-t) = x_g(t)$



ungerade Funktion: $x_u(-t) = -x_u(t)$

Abbildung 23: Gerade und ungerade Funktionen

Definition: Die *Fourier-Reihe* eines periodischen Signals $x(t)$ lautet:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

A_0 ... Gleichanteil

A_n ... Kosinuskoeffizient

B_n ... Sinuskoeffizient

$\omega_0 2\pi/T_0$... Grundkreisfrequenz der periodischen Signale (T_0 Periodendauer)

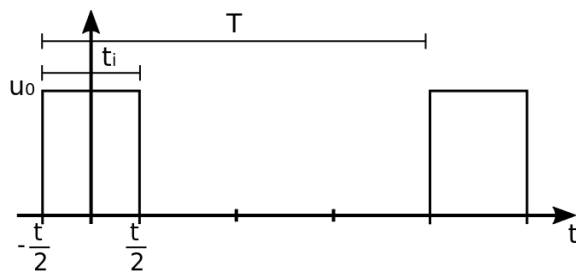
Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt$$

Beispiel: Berechnung des Spektrums



$$U_0 = 4V$$

$$T_p = 1ms$$

$$t = 250\mu s$$

Abbildung 24: Relevante Größen für die Berechnung des Spektrums einer Rechteckfunktion

$$k = \frac{t_i}{T_p} = \frac{1}{4}$$

| k ist das Tastverhältnis

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T_p} \cdot \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} f(t) dt \\ &= \frac{4V}{T_p} [t]_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = \frac{4V \cdot t_i}{T_p} = \underline{\underline{1V}} \end{aligned}$$

$$| f(t) = 4V$$

$$A_0 = \frac{t_i}{T_p} \cdot k$$

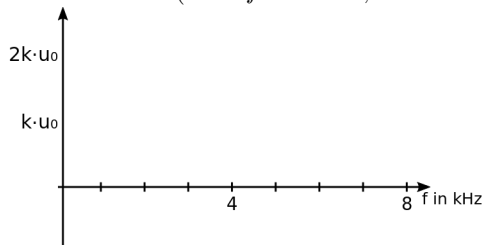
für periodische Rechteckfunktionen

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T_p} \cdot \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega_p t) dt \\ &= 2 \cdot u_o \cdot \frac{t_i}{T_p} \cdot \text{si}(n\omega_p \frac{t_i}{2}) \end{aligned}$$

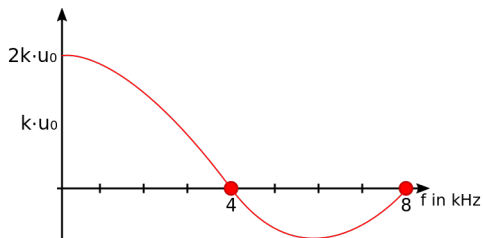
$$| \frac{t_i}{T_p} = k \text{ und } \text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Algorithmus zum Darstellen des Spektrums

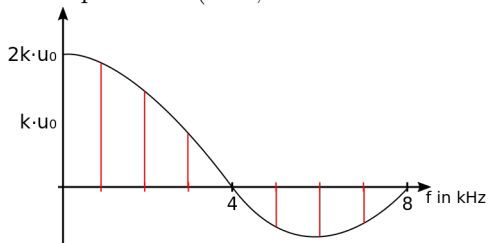
1. Skala einteilen (hier: $f = 1\text{kHz}$, da $T = 1\text{ms}$)

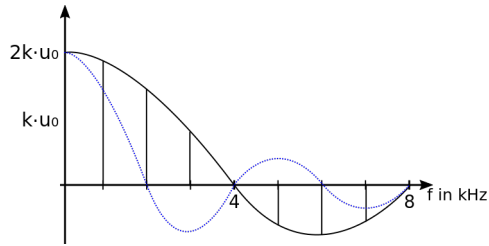


2. Nullstellen eintragen: ganze Vielfache von $\frac{T_p}{t_i} = 4$



3. Linien pro 1kHz (dort, wo keine Nullstelle)

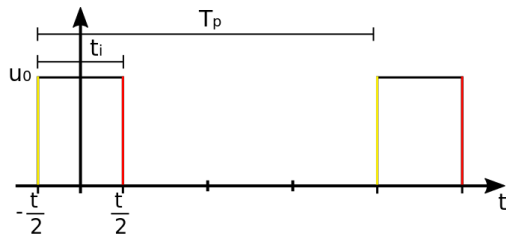




gestrichelter Graph: bei $t = 500\mu s$

Die n te Spektrallinie befindet sich bei $\frac{n}{T_p}$ und die Nullstellen sind Vielfache von $\frac{1}{t_i}$.

1.1.5 Überführung der Fourier-Reihe ins Fourier-Integral



$$u(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t)$$

Abbildung 25: Relevante Größen für die Überführung der Fourier-Reihe ins Fourier-Integral

Idee: Rotation um 90° um die u-Achse

→ es “näher” sich abwechselnd gelbe und rote Flanken/Linien

→ alle Größen, bis auf Phase, sind ablesbar: z.B. ist T_p die Zeit zwischen zwei gelben Flanken

Die Form der *Hüllkurve* des Spektrums wird durch die si-Funktion beschrieben, ändert sich grundsätzlich nicht, wird jedoch vom Eingangssignal (Rechteck-, Dreieck- oder Trapez-Signal) beeinflusst.

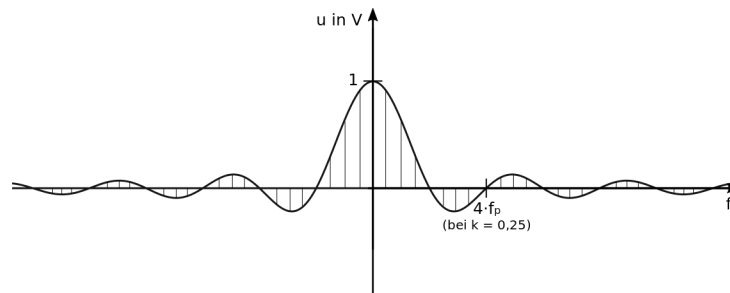


Abbildung 26: Normierte Darstellung der Hüllkurve des aus Abb. 25 berechneten Spektrums

- normierte Darstellung (max. 1V) // Vorteil von Normierung: “vergleichbar machen”
- die Anzahl der Spektrallinien ist abhängig von $\frac{t_i}{T_p} = k$ // im Beispiel oben ist $k = \frac{1}{4}$
- um die Anzahl zu verdoppeln muss k halbiert, T_p also verdoppelt werden

- bei $T_p \rightarrow \infty$, d.h. bei Impuls/nicht-periodischer Funktion, wird aus der Summe ein Integral und die Anzahl der Linien unendlich, sodass alle Frequenzen enthalten sind
- auf dem Spektrumanalysator ist dies dargestellt (als Fläche unter der Hüllkurve)

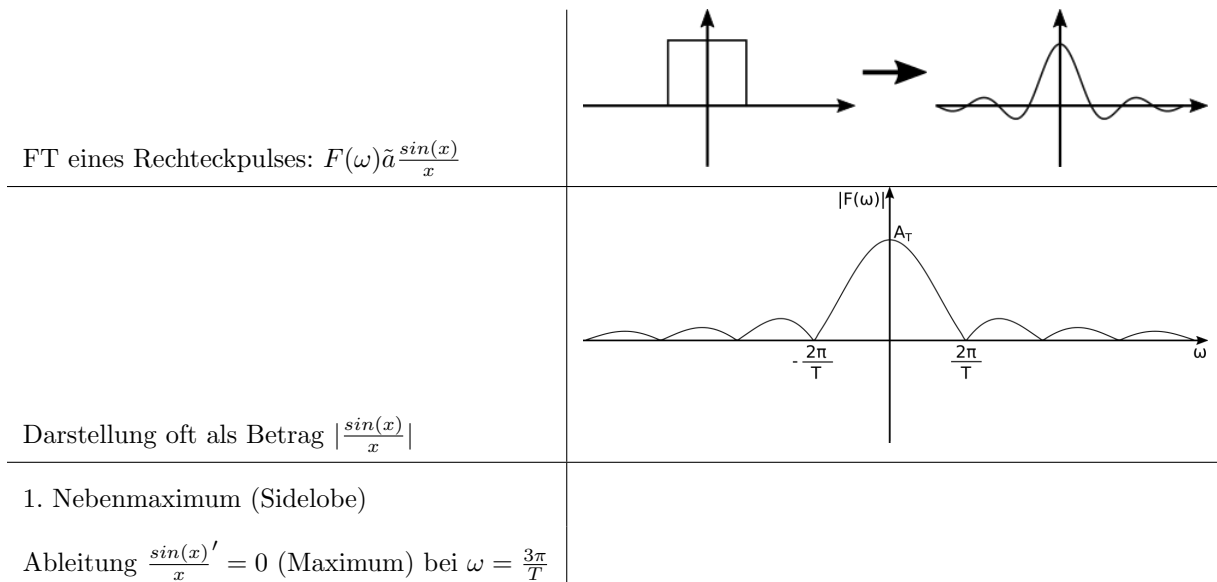
Die Spektraldarstellung von $f(t)$ ist die Fouriertransformierte $F(\omega)$. Sie ist im Allgemeinen komplex (Amplitude und Phase).

	Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich	Rück-Transformation vom Frequenz in den Zeitbereich
Fourier-Integral	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$

Aufspaltung von $F(\omega)$ in Real- und Imaginärteil: $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t)$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t) dt \\
 &\rightarrow F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) \\
 &\rightarrow |F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \quad | \text{Betrag (auch Amplitudenspektrum } A(\omega)) \\
 &\rightarrow \phi(\omega) = \frac{I(\omega)}{R(\omega)} \quad | \text{Phase}
 \end{aligned}$$

Weitergehende Aspekte: FT eines Rechteck-Pulses $\rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$



⇒ bei $T = 1\mu s$ wird eine Bandbreite von 1MHz benötigt

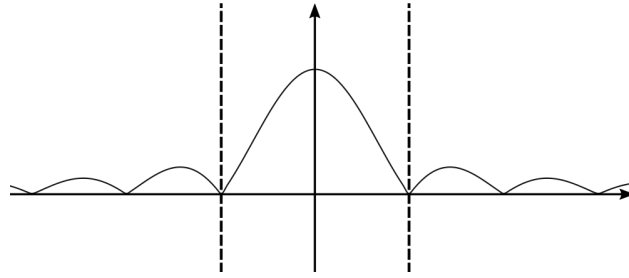


Abbildung 27: Der Großteil der Leistung ist im markierten Bereich ablesbar

	Zeitfunktion $f(t)$	Spektraldichte $F(\omega)$
1	$f_T(t)$ 	$2 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} = 2T \cdot \text{si}(T\omega)$
2	$\frac{\sin(\omega_0 t)}{t}$ 	$\pi_{t\omega_0}(\omega)$

Zusammenfassende Erkenntnis:

1. Ein *periodisches* Zeitsignal besitzt ein *diskretes* Spektrum
2. Ein *aperiodisches* Zeitsignal besitzt ein *kontinuierliches* Spektrum

1.2 Allgemeine Eigenschaften der Fourier-Transformation

Der Verlauf der spektralen Dichtefunktion gibt Auskunft über die Verteilung der (unendlich kleinen aber differentiell unterschiedlichen) Amplituden der unendlich vielen Cosinus-Schwingungen über die Frequenz. Die Maßeinheit ist [V/Hz]. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der Amplitudendichte $U(f)$.

Merke: Die Maßeinheit der Fourier-Koeffizienten A_k (für periodische Signale) ist Volt.

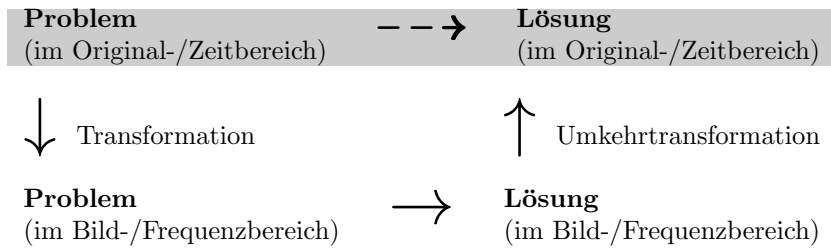


Abbildung 28: Problemlösung mithilfe der Fouriertransformation

Nicht alle Signale $f(t)$ sind Fourier-transformierbar. Die Energie des Signals $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$ muss dafür endlich sein.

Bemerkung:

augenblickliche Leistung:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \begin{cases} R \cdot i^2(t) \\ \frac{u^2(t)}{R} \end{cases}$$

gesamte Energie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = \begin{cases} R \cdot \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) \\ \frac{1}{R} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt \end{cases}$$

1.2.1 Ableitung und Integration im Zeitbereich

Differentiationssatz

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} \circ \mathcal{F} \bullet (j\omega)^n \cdot Y(\omega)$$

Aus der anspruchsvollen Operation des Differenzierens im Zeitbereich wird die einfache Multiplikation mit $j\omega$ im Frequenzbereich!

Integrationsatz

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega)$$

Aus der Integration wird im Frequenzbereich die Division durch $j\omega$.

1.2.2 Modulationseigenschaft

Einer frequenzverschobenen Fouriertransformierten entspricht im Zeitbereich eine Multiplikation von $x(t)$ mit der komplexen Exponentialfunktion $e^{j\omega_0 t}$.

Diese Multiplikation kann als *Modulation* gedeutet werden: Die komplexe Trägerschwingung $e^{j\omega_0 t}$ wird mit $x(t)$ moduliert. Daher heißt diese Rechenregel der Fouriertransformierten auch *Modulationssatz*.

Modulator mit Ausgangssignal im Zeit- und Frequenzbereich:

Beispiel: Multiplikation Basisband-Signal mit \cos -Trägersignal

$$s(x) \rightarrow \otimes \rightarrow \text{Amplitudenmodulation:} \\ y(t) = 0,5 \cdot s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} + 0,5 \cdot s(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

↑
Träger: $\cos(2\pi f_0 t)$

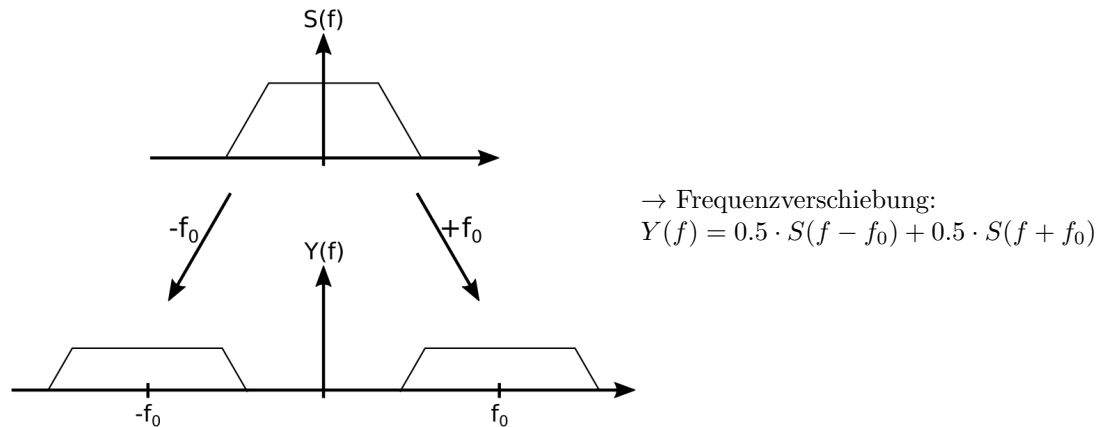


Abbildung 29: Frequenzverschiebung bei der Amplitudenmodulation

Mega-Abbildung: Nutzsignal kombiniert mit Trägersignal → modulierte Signal

Multiplikation im Zeitbereich → Verschiebung des Spektrums → Modulation → Frequenzmultiplex

Sinn und Zweck der Modulation

1. dient der frequenzmäßigen Anpassung an verwendeten Übertragungskanal
2. Mehrfachausnutzung eines Übertragungsmediums wird möglich (im Zeitmultiplexverfahren werden mehrere Impulsträger ineinander verschachtelt; Frequenzmultiplex)
3. Störsicherheit kann verbessert werden (Pulsmodulation → höhere Sicherheit gegenüber Fremdstörungen)

Bei analogen Kanälen: Störabstand (Wikipedia: SNR) $a_{St} = 20 \lg \left(\frac{u_N}{u_{St}} \right)$ minimieren

1.3 Modulationsverfahren mit zeitkontinuierlichen Trägern

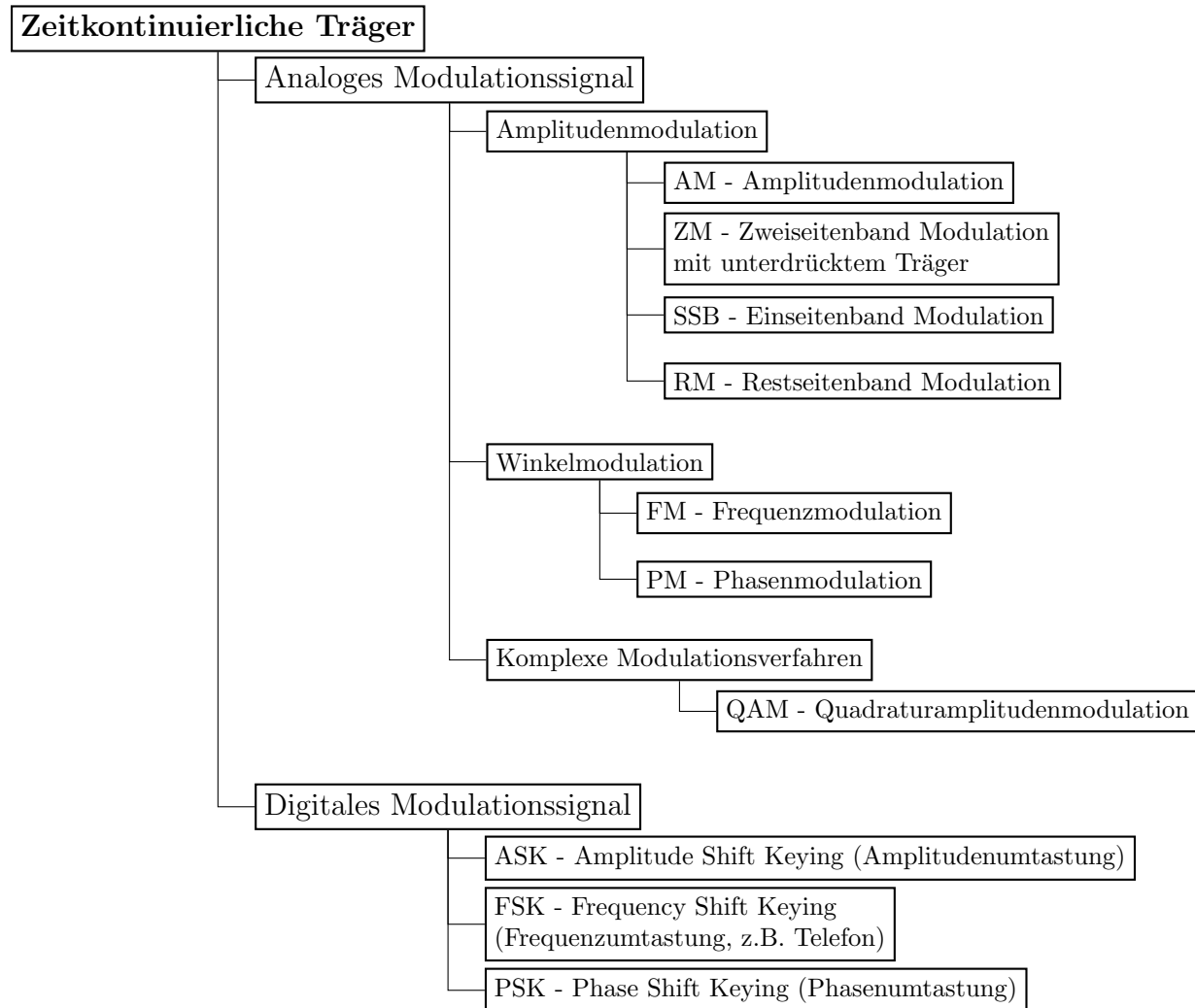


Abbildung 30: Analoges ↔ Digitales Modulationssignal

Amplitudenmodulation aus mathematischer Sicht

$$u(t) = u_0 \cdot \sin(2\pi f_{Tr} \cdot t + \varphi)$$

mit $u(t)$ = Momentanwert,
 u_0 = Spitzenwert der Trägeramplitude,
 $2\pi f_{Tr}$ = Trägerfrequenz,
 φ = Phasenverschiebung, meistens 0

Funktionsgleichung des Modulationssignals: $u_S(t) = \hat{u}_S \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$
 Funktionsgleichung des Trägersignals: $u_T(t) = \hat{u}_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$

$$\begin{aligned}
 u_{AM}(t) &= [u_S(t) + DC] \cdot u_T(t) \quad \text{mit } DC = 1 \\
 &= \hat{u}_S \cdot \cos(\omega_S \cdot t) \cdot \hat{u}_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t) + \hat{u} \cdot \cos(\omega_T \cdot t)
 \end{aligned}$$

Für das Produkt zweier Kosinusfunktionen gilt

$$\begin{aligned}
 \cos(\omega_S t) \cdot \cos(\omega_T t) &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega_T t + \omega_S t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega_T t - \omega_S t) \\
 \Rightarrow u_{AM} &= \hat{u}_T \cdot \left[\frac{\hat{u}_S}{2} \cdot \cos(\omega_T t - \omega_S t) + \cos(\omega_T t) + \frac{\hat{u}_S}{2} \cdot \cos(\omega_T t + \omega_S t) \right]
 \end{aligned}$$

mit unterem Seitenfrequenzsignal Trägerfrequenzsignal oberem Seitenfrequenzsignal.

Modulationsdiagramme (Beispielspektren) er bringt einen Ausdruck mit



Prüfungsfrage: Zeichnen Sie ein frequenzmoduliertes Signal im Zeit- und Frequenzbereich!

Antwort:

1.4 Zeitverzögerung

Welche Übertragungskanäle kennen Sie?

- drahtgebundene (Kabel, wie z.B. Koaxial, Glasfaser)
- drahtlose (Funkkanäle)



$$t_0 = \frac{L}{c_0}$$

L: Länge der Funkstrecke

$c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ Lichtgeschwindigkeit

Abbildung 31: Berechnung der Übertragungslatenz eines Übertragungskanals

Zur Berechnung substituiert man im Fourier-Integral

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \text{ mit } v = t - \tau \text{ und } y(t) = u(t - \tau)$$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(v)e^{-i\omega(v+\tau)} dv \\ &= e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} u(v)e^{-j\omega v} dv \\ &= e^{-j\omega\tau} U(\omega) \end{aligned}$$

1.4.1 Dirac-Delta-Funktion

Der Dirac-Impuls besitzt folgende elementare Eigenschaften:

$$\delta(t) = 0, t \neq 0 \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Wie sind die folgenden Parameter der Dirac-Delta-Funktion definiert?

Fläche: = 1

Breite: unendlich schmal

Höhe: unendlich hoch

Anwendung: Abtast- oder Ausblendeigenschaft

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

Zusammenhang Zeit- und Frequenzbereich:

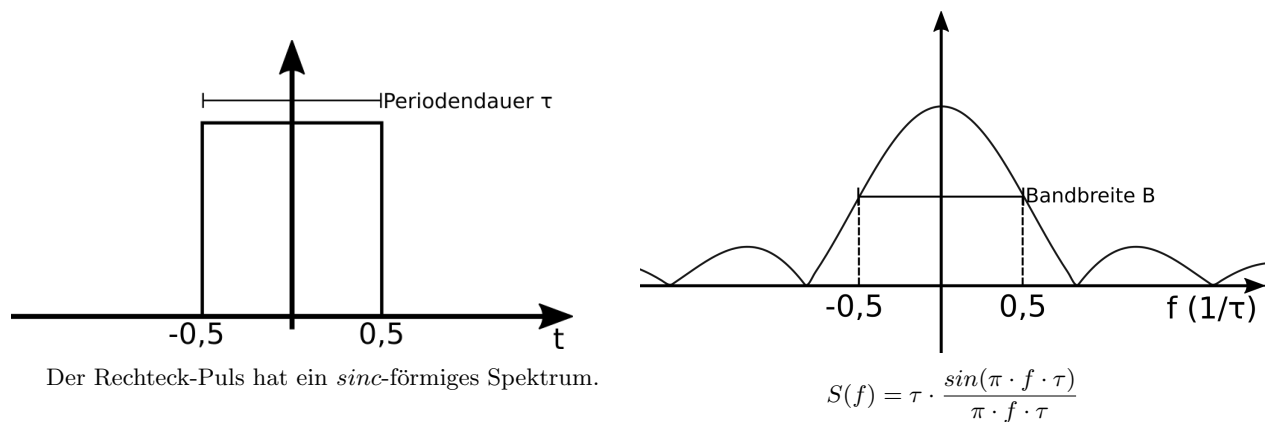


Abbildung 32: Pulsdauer τ mal Bandbreite $B \approx 1$.

Nullstellen sind im Frequenzbereich bei Vielfachen von $\frac{1}{T}$.

⇒ Je mehr Frequenzanteile der Oberwellen übernommen werden, desto genauer (“rechteckiger”) wird das Signal. Die Bandbreite $B = \frac{1}{T}$ reicht aus, die übrigen Frequenzanteile können vernachlässigt werden.

1.5 Faltung

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \\ u(t) \circ - \bullet U(j\omega) \\ g(t) \circ - \bullet G(j\omega) \\ Y(j\omega) &= G(j\omega) \cdot U(j\omega) \circ - \bullet y(t) = g(t) * u(t) \\ // \text{mit } G(j\omega) &: \text{Übertragungsfunktion}\end{aligned}$$

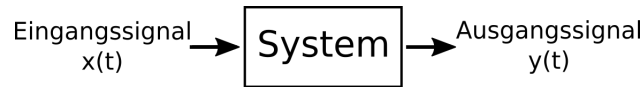
D.h. die komplizierte Operation der Faltung ist im Zeitbereich

$$\begin{aligned}y(t) = g(t) * u(t) &= \int_0^t g(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau\end{aligned}$$

2 Die Übertragungsfunktion

2.1 Die Übertragungsfunktion

LTI-System

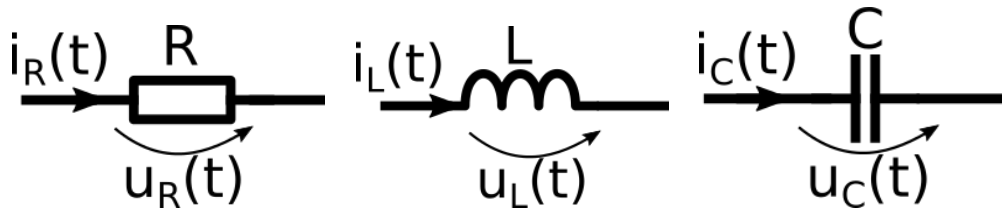


Eigenschaften von LTI-Systemen (**L**inear **T**ime **I**nvariant)

- lineare Systeme: der Überlagerungssatz ist anwendbar (Superpositionsprinzip); z.B. Verstärker: $y(t) = 5x$
- zeitinvariante Systeme: die Systemkenngrößen (Werte der Bauelemente, z.B. R, L, C) sowie die Systemeigenschaften im eingeschwungenen Zustand (z.B. Verstärkung, Phasenverschiebung, ...) ändern sich nicht mit der Zeit

2.1.1 Differenzialgleichungen (DGL) zur Beschreibung im Zeitbereich

Zum Aufstellen der DGL für das Zeitverhalten von RLC-Netzwerken benötigt man Maschengleichungen, Knotenpunktgleichungen und die folgenden Signalzusammenhänge an den Bauelementen:



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot u_R(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t) dt$$

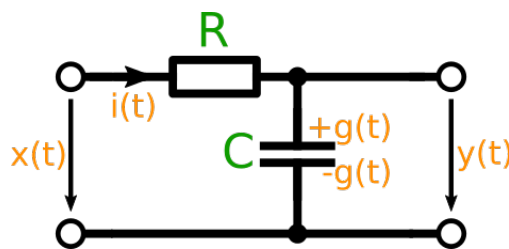
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t) dt$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

Zeitfunktionen werden mit Kleinbuchstaben (z.B. u, i, p, ...) gekennzeichnet. Zur Verdeutlichung und in Zweifelsfällen kann das Argument angefügt werden (z.B. u(t), i(t), p(t), ...).

Beispiel für L: Entfernung von Spannungsspitzen, Glättung der Spannung an Kabeln (Netzteil, VGA) durch umwickelten Ferrit-Kern

2.1.2 RC-Glied (System 1. Ordnung)



Systemparameter: grün
Zustandsparameter: orange

$$x(t) = R \cdot i(t) + y(t), \quad y(t) = \frac{g(t)}{C}, \quad i(t) = \frac{dy}{dt}$$

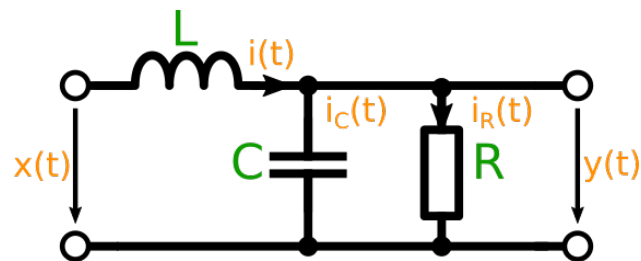
$$\Rightarrow x(t) = RC \frac{dy}{dt} + y(t) \quad (\text{DG 1. Ordnung})$$



Prüfungsfrage: Erläutern Sie die Aufstellung der Maschen- und Knotenpunktgleichungen (am Schaltbild)

Antwort:

2.1.3 LC-Glied (System 2. Ordnung)



$$x(t) = L \frac{\delta i}{\delta t} + y(t)$$

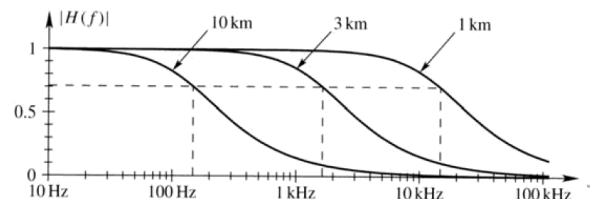
$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

$$= \frac{y(t)}{R} + C \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{L}{R} \frac{dy}{dt} + LC \frac{d^2 y}{dt^2} + y(t) \quad (\text{DG 2. Ordnung})$$

Schwingungsfähiges System: Ausgleich zwischen Spannung und Ladung durch Spule und Kondensator

2.1.4 Frequenzgang einer NF-Leitung (niederfrequent)



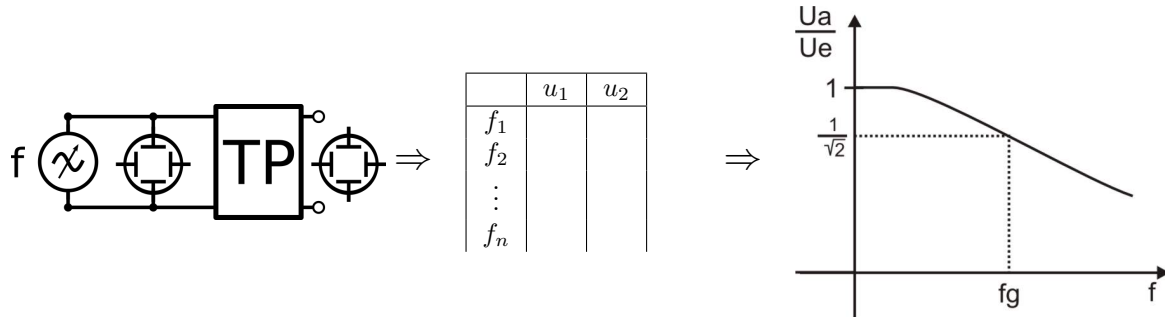
Beispiel Telefonleitung: Kupferdraht 0,4 mm Durchmesser; $R = 300 \frac{\Omega}{\text{km}}$; $36 \frac{\text{nF}}{\text{km}}$
Bei 1 km ergibt sich die Zeitkonstante $\tau = RC = 10,8 \mu\text{s}$. Diese wächst quadratisch mit der Leitungslänge.

$$H(f) = H_C(j2\pi f) = \frac{1}{1 + j2\pi RC f}$$

2.2 Bestimmung der Übertragungsfunktion eines Systems

Mithilfe von Messung der Spannung am Ein- und Ausgang pro Frequenz.

Durch einen Frequenzgenerator (Frequenz, Art des Signals und Amplitude einstellbar) werden verschiedene Signale erzeugt und gemessen.



Teilen der Aus- durch die Eingangsspannung ergibt **Übertragungsfunktion**:

$$H(\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)}, \text{ denn: } y(\omega) = H(\omega) \cdot x(\omega)$$

2.3 Die Impuls-Antwort eines Systems

Möglichkeiten der Systembeschreibung:

- Differenzialgleichungen
- Übertragungsfunktion $H(\omega)$
- Impulsantwort $h(t)$

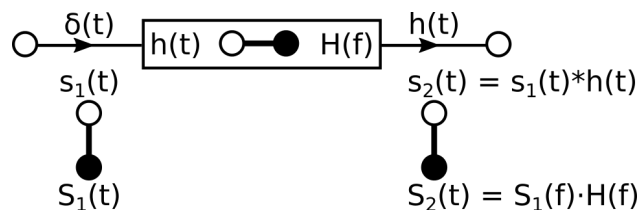
Prüfungsfrage: Wie ermittelt man die Impulsantwort eines Systems?

Antwort:



$$x(t) = \delta(t) \rightarrow \boxed{\text{System}_{H(\omega)}} \rightarrow y(t) = ?$$

Regt man ein System mit einem Dirac-Impuls an, so erhält man am Ausgang des Systems die Impulsantwort $h(t)$. Voraussetzung: Nutzung der Fourier-Transformation wie folgt.

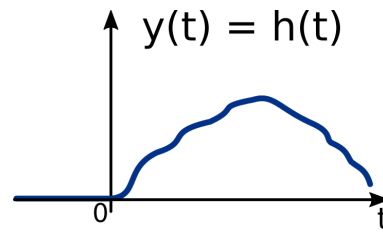
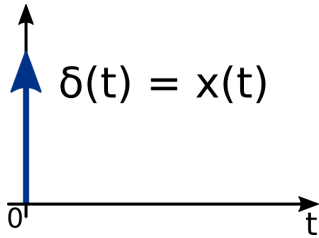


Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzbereich

Bestimmung von $y(t)$:

- Fourier-Transformation des Eingangssignals
- Multiplikation im Frequenzbereich $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$
- Rücktransformation in den Zeitbereich

Wie sieht der zeitliche Verlauf von $h(t)$ aus?



Da das System wegen einer Anregung zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht vor $t = 0$ reagieren kann (*Kausalität*), ist $h(t) = 0$ für $t < 0$.

Kausalität:

Ein System ist genau dann kausal, wenn das Ausgangssignal $y(t)$ für jeden Zeitpunkt t nur von gegenwärtigen und vergangenen Werten des Eingangssignals $x(t)$ abhängt. Dies ist gegeben, wenn die Impulsantwort $h(t)$ für alle negativen Zeiten verschwindet:

$$h(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

Merke: Die Impulsantwort $h(t)$ ist an sich ein Signal, welches das System beschreibt.

2.4 Filter

Filter sind frequenzselektive Systeme

Die Übertragungsfunktion eines Tiefpassfilters 1. Ordnung:

2.4.1 Ordnung eines Filters

Bei 1. Ordnung ist der Anstieg: $-20 \frac{dB}{\text{Dekade}}$, was folgendes bedeutet:

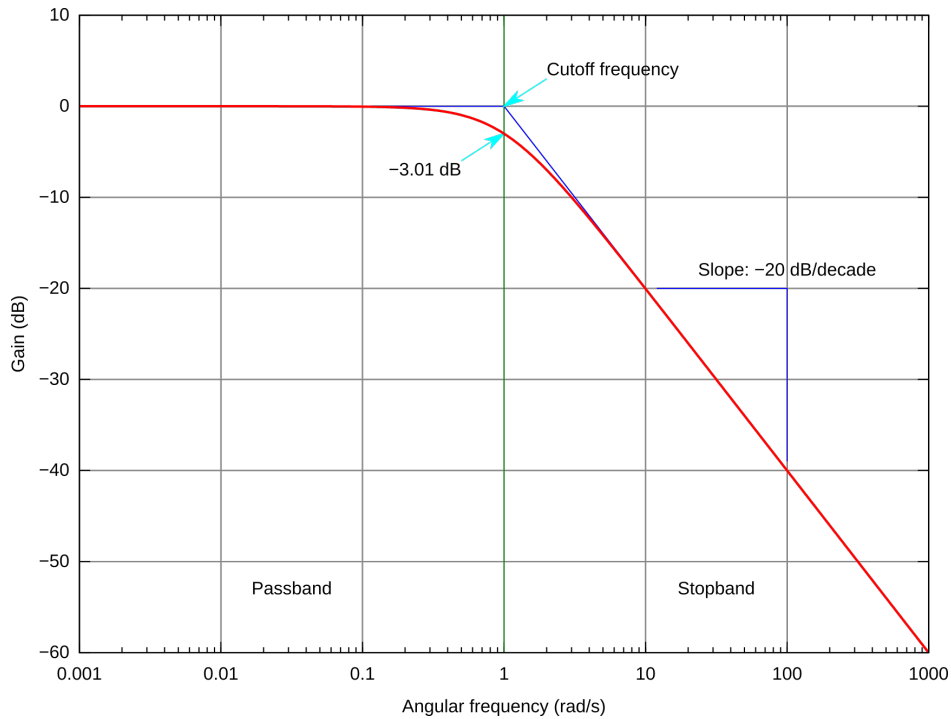
$$20dB = 20 \cdot \lg \frac{u_1}{u_2}$$

$$1 = \lg \frac{u_1}{u_2}$$

$$u_1 = 10 \cdot u_2$$

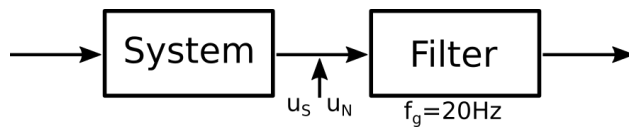
bei 2. Ordnung: $40 \frac{dB}{\text{Dekade}}$

bei 3. Ordnung: $60 \frac{dB}{\text{Dekade}}$

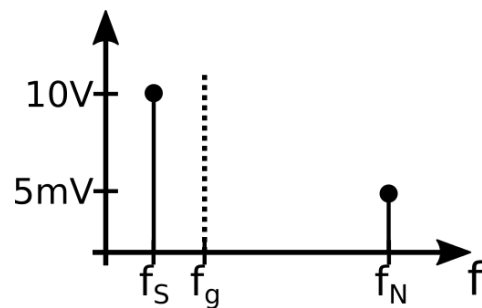


„Butterworth response“ von derivative work: Krishnavedala (talk)Butterworth_response.png; Omegatron - Butterworth_response.png. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Butterworth_response.svg#/media/File:Butterworth_response.svg

Beispiel: Waage



$$\begin{aligned}
 u_S &= \hat{u}_S \cdot \cos(\omega_S \cdot t) \\
 u_N &= \hat{u}_N \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \\
 f_S &= 10\text{Hz} \\
 f_N &= 50\text{Hz} \quad // \text{Netzfrequenz}
 \end{aligned}$$



Die Dämpfung der Netzfrequenz beträgt: $a = 80\text{dB}$

2.4.2 Klassifizierung von Filtern

1. Filtertypen

- Tief-, Hoch-, Bandpass; Bandsperre
2. Filtercharakteristik
 - Tschebycheff, Butterworth, Bessel, Chauer
 3. Realisierung
 - passive Filter:
Realisierung mit R, L, C
RC-Glied, RL-Glied, CL-Glied und Kombination daraus
 - aktive Filter:
Realisierung mit Operationsverstärkern
nur R und C, aber *keine* Spule L

2.4.3 ideale Filter

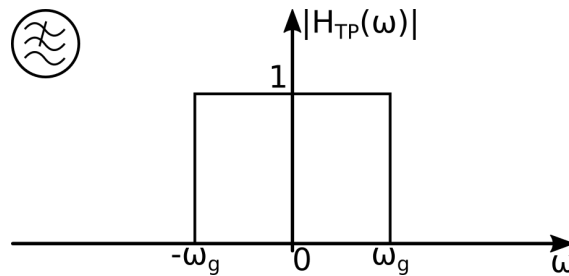
Kennzeichen idealer Filter:

- sehr hohe Flankensteilheit (senkrecht)
- nicht realisierbar (Kausalität)

Amplitudencharakteristik idealer Filter:

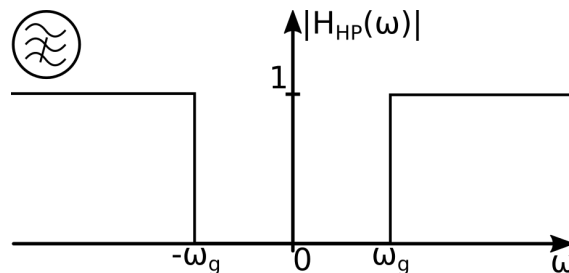
1. Tiefpassfilter:

Anwendungsbeispiel: Antialiasingfilter zum Einhalten des Abtasttheorems



2. Hochpassfilter:

Anwendungsbeispiel: Trennung von zwei Signalen (wie z.B. Gleichanteil und Signal) mittels Kondensator

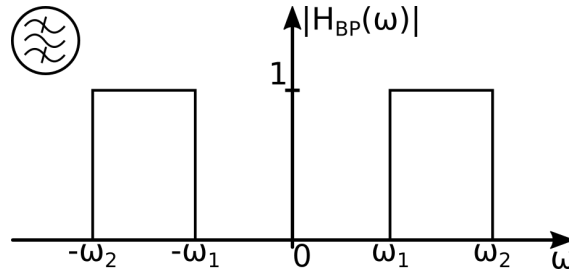


Induktivität ist praktisch durch eine Spule realisiert. Ein nicht gewickeltes Kabel hat einen Widerstand von $195\Omega/km$ (Ergebnis aus der Übung). Ein Hochpassfilter kann aus einem Tiefpassfilter generiert werden, indem die Bauteile (Spulen, Kondensatoren) vertauscht werden.

3. Bandpassfilter:

Ein Bandpassfilter ist ein Filter, der nur Signale eines Frequenzbands passieren lässt. Die Frequenzbereiche unterhalb und oberhalb des Durchlassbereiches werden dabei gesperrt oder deutlich abgeschwächt.

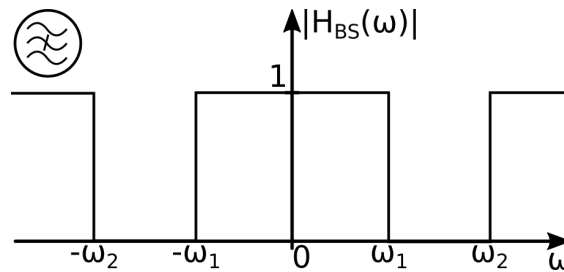
Anwendungsbeispiel: Trennung verschiedener Radio-Frequenzbereiche (UKW, KW, ...)



Bedeutung der Indizierung: zusammengehörig indizierte Bauteile (je eine Spule und ein Kondensator) bilden einen Schwingkreis.

4. Bandstopfilter:

Anwendungsbeispiel: Messtechnik (zum gezielten Unterdrücken von Störsignalen)



Ein Bandstopfilter kann aus einem Bandpassfilter generiert werden, indem die Bauteile (Spulen, Kondensatoren) vertauscht werden.



Prüfungsfrage: Wie kann ein Hochpass-/Bandstopfilter aus einem Tiefpass-/Bandpassfilter generiert werden?

Antwort: Durch Vertauschen der Bauteile (Spulen, Kondensatoren).



Prüfungsfrage: Was sind Reihen-/Parallelresonanzen?

Antwort:

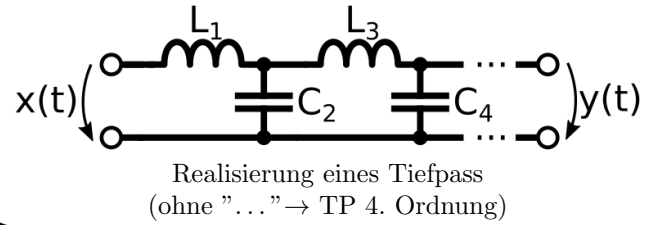
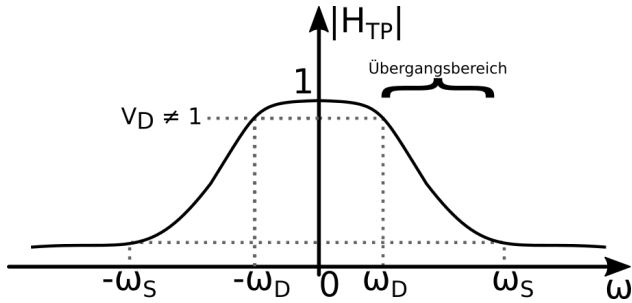
2.4.4 realisierbare Filter

Eigenschaften:

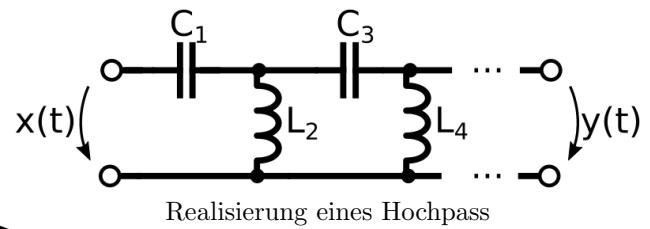
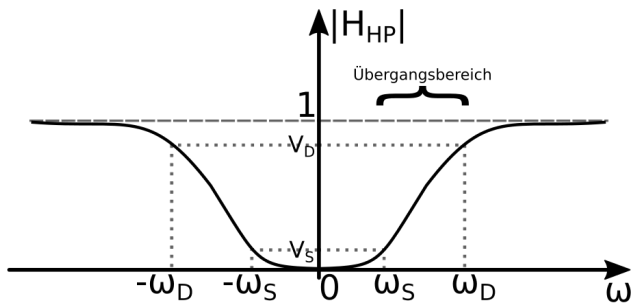
realisierbare Filter haben:

- **keine** perfekt flache Charakteristik im Durchlassbereich
- **keine** perfekt flache Charakteristik im Sperrbereich
- **keine** unendlich steile Filterflanke zwischen dem Durchlass- und dem Sperrbereich

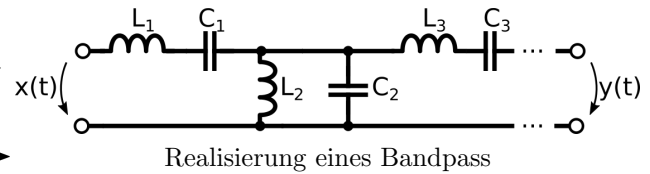
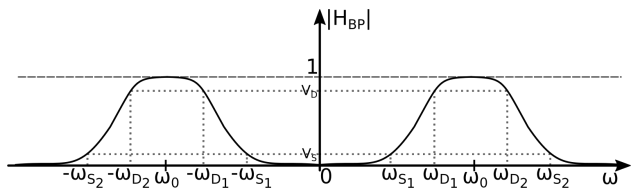
1. Tiefpassfilter (TPF):



2. Hochpassfilter (HPF):



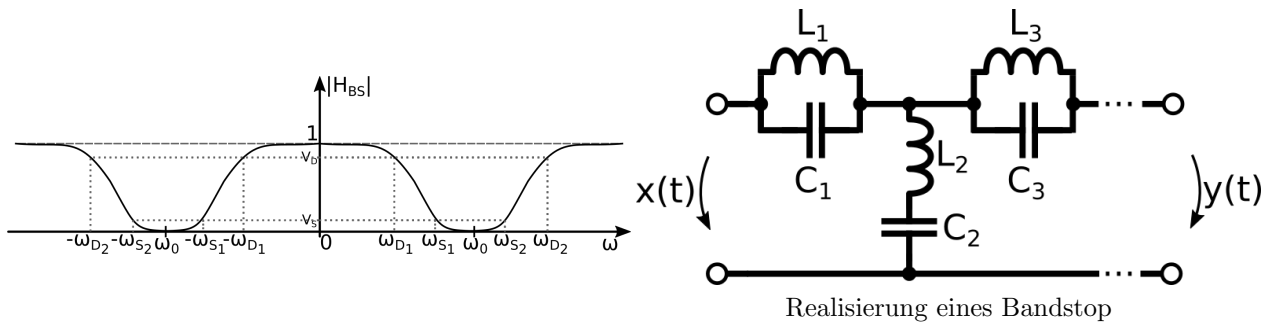
3. Bandpassfilter (BPF):



Es handelt sich hierbei um einen Schwingkreis und so treten *Reihenresonanz* (L_1, C_1) und *Parallelresonanz* (L_2, C_2) auf.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$$

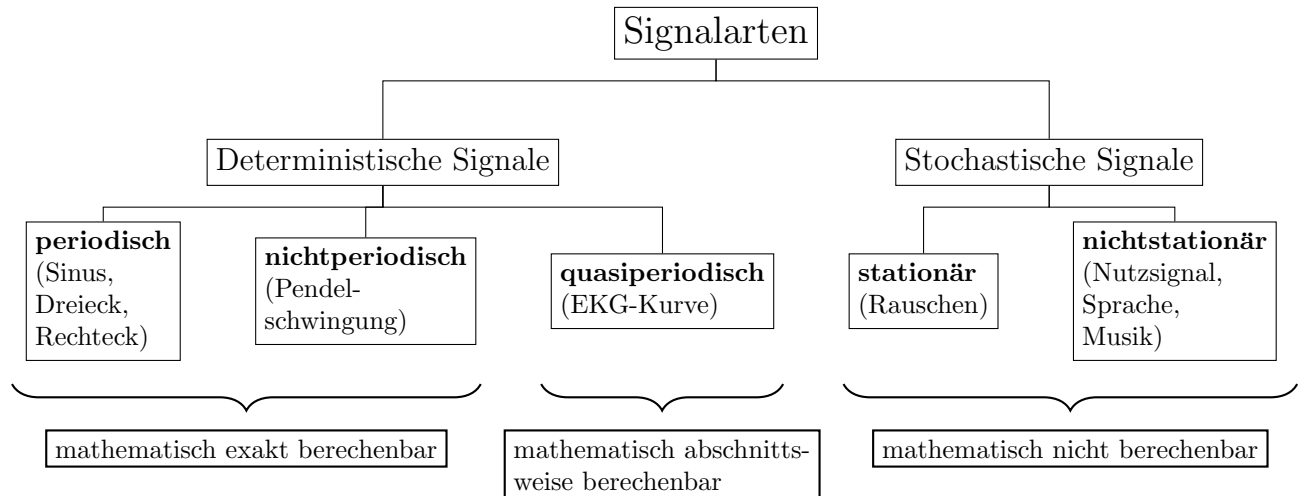
4. Bandstopfilter (BSF):



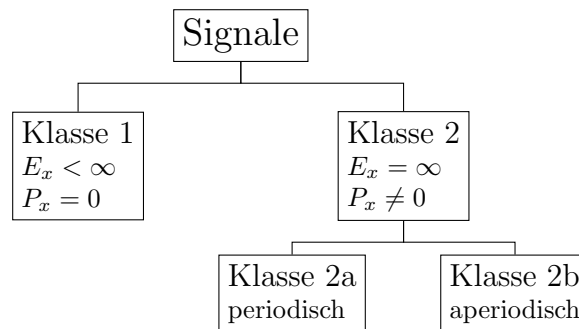
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$$

3 Deterministische und stochastische Vorgänge

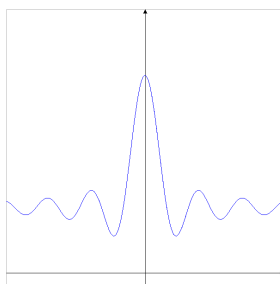
Zur Einordnung der Thematik wollen wir zunächst die Klassierung von Signalen nach folgenden Aspekten betrachten.



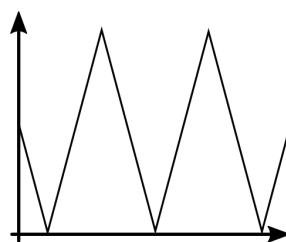
3.1 Energie- und Leistungssignale



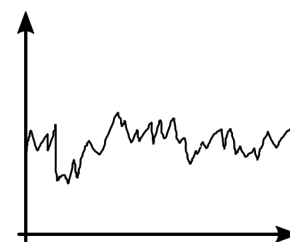
E: Singalenergie, P: Signalleistung



Klasse 1



Klasse 2a



Klasse 2b

Beispiele für die Klassen

Wiederholung: Leistung, Energie

$$P = U \cdot I$$

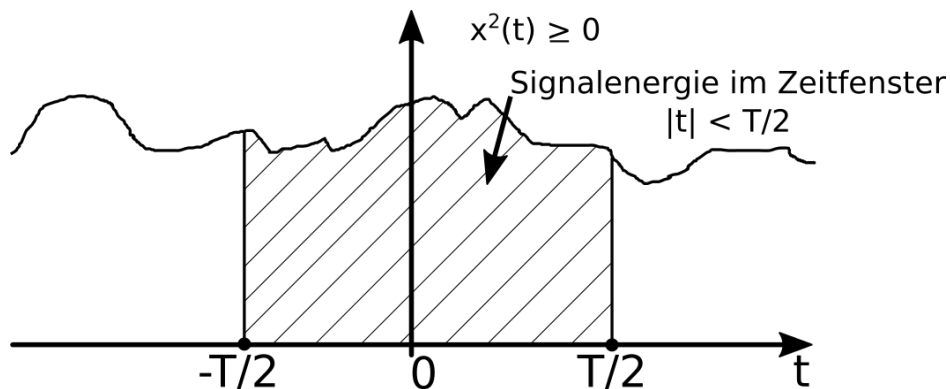
Maßeinheit: W,

$$E = P \cdot t$$

Maßeinheit: ws, kWh

Signalenergie: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ Maßeinheit: $V^2 s$

Signalleistung: $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$ Maßeinheit: V^2



Beachte: $x^2(t)$ ist ein normiertes Signal! Normierung: $R = 1\Omega$

3.2 Zusammenfassung

3.2.1 Energieisignale

- endliche Signalenergie: $E_x < \infty$
- verschwindende Signalleistung: $P_x \rightarrow 0$

Signaleigenschaften:

- zeitliche begrenzt, z.B. Einzelimpuls (Fouriertransformierte Signale)
- abklingende Amplitude, z.B. Ausschwingvorgang



Prüfungsfrage: Kann man mit deterministischen Signalen Informationen übertragen?

Antwort: "Definition" Information: Wenn viel Information übertragen wird, ist das "überraschend". Ein deterministisches Signale kann nicht viel Information enthalten, also ist keine Kommunikation (Übertragung von Information) möglich. "Der Sender ist kaputt" ist keine komplexe Information.

3.2.2 Leistungssignale

- unendliche Signalenergie: $E_x = \infty$
- endliche mittlere Signalleistung: $P_x < \infty$

Signaleigenschaften:

- periodische Signale
- aperiodische Signale

3.3 Rauschen

3.3.1 Einleitung - ein geschichtlicher Exkurs

- Die Geschichte des Rauschens von Bauelementen ist eng mit der des Verstärkers verbunden.
- Da es sich beim Rauschen um sehr kleine Spannungen bzw. Ströme handelt, wurden diese erst mit Erfindung des Verstärkers Anfang des 20. Jahrhunderts erfass- und messbar.
- Bemerkbar machte sich das Rauschen als schwankende additive Überlagerung von Messwerten und bei der Nachrichtenübertragung als Störgeräusch, welches auch noch dann vorhanden war, wenn die Quelle verstummt war. *Beispiel: Verstärker rauscht auch, wenn das Mikrofon nicht mehr angeschlossen ist (Eigenrauschen).*
- Der Begriff "Rauschen" wurde später auch auf das nicht hörbare Frequenzspektrum dieser Schwankungserscheinung verallgemeinert.
- Die Namen derer, die sich zu dieser Zeit mit diesen Phänomenen beschäftigten, sind auch heute noch als Pioniere der Elektrotechnik und Physik bekannt: **Einstein (Relativitätstheorie, Photoeffekt), Schottky (Schrotrauschen, Rauschphänomene in Elektronenröhren), Johnson (Thermisches Widerstandsrauschen), Nyquist (Shannon-Nyquist- bzw. Abtast-Theorem)**

3.3.2 Thermisches Rauschen

Die Ursache für **thermisches Rauschen** (weißes Rauschen, Johnson Rauschen, Nyquist Rauschen) ist die Brownsche Molekularbewegung.

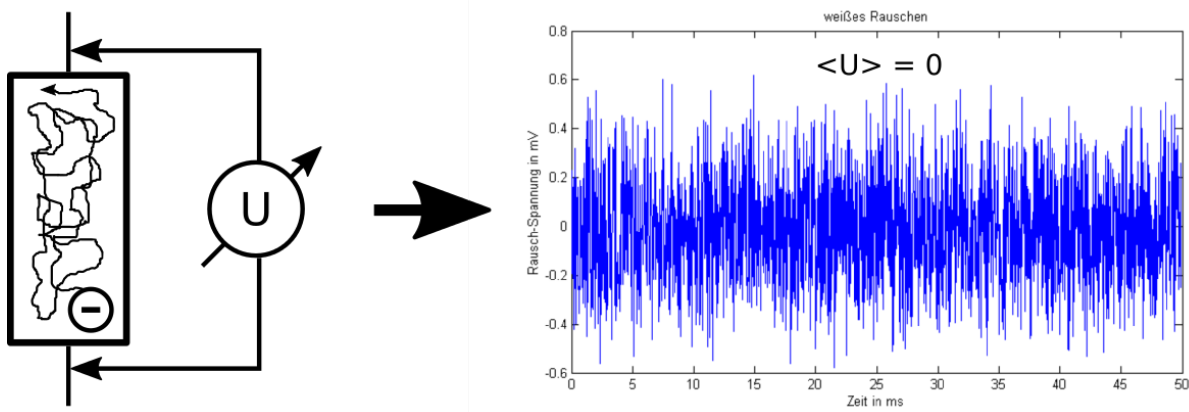


Abbildung 41: weißes Rauschen am ohmschen Widerstand

Die Größe der Spannung ist von der Temperatur, vom betrachteten Frequenzbereich und vom Widerstand abhängig. Am absoluten Nullpunkt kommt die regellose Bewegung zum Erliegen.

Der quadratische Effektivwert der Rauschspannung hängt nach Harry Nyquist nur von der Temperatur T , dem ohmschen Widerstand R und der Bandbreite Δf ab:

$$U_n = \sqrt{4k_B T R \Delta f}$$

Frequenzbereich dargestellt:

$$W_u(f) = 4k_B T R$$

U_n Effektivwert der Rauschspannung über dem Widerstand

$W_u(f)$ spektrale Dichtefunktion

k_B Boltzmann-Konstante $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

R Widerstand

T absolute Temperatur des Widerstands ($T/^{\circ}C = T/K - 273.15$)

Δf Bandbreite über der das Rauschen gemessen wird

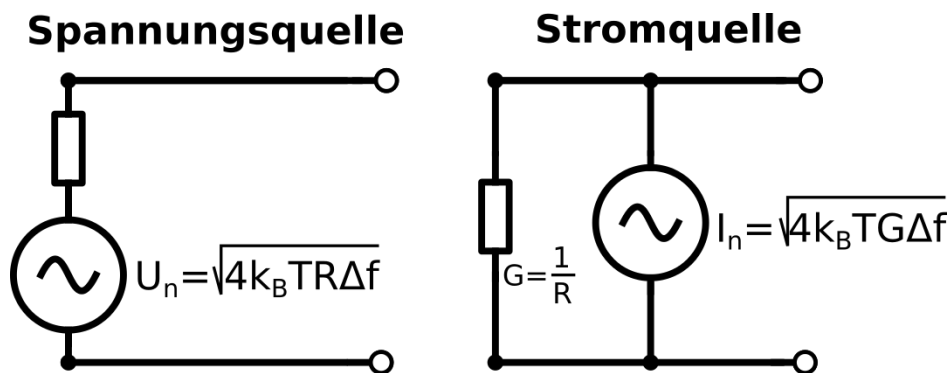


Abbildung 42: Ersatzschaltbild eines rauschenden Widerstands

Verfügbare Leistung

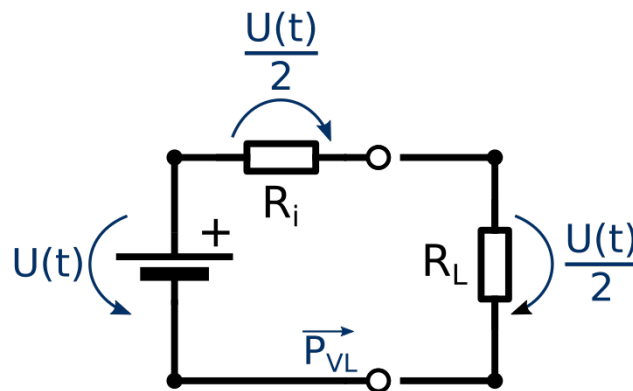


Abbildung 43: Schaltung zur Leistungsanpassung

$$P_{VL} = \left\langle \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^2}{R} \right\rangle \Rightarrow \langle U^2 \rangle = 4RP_{VL}$$

Leistungsanpassung: Innenwiderstand $R_i = \frac{U}{I}$, wobei I der Kurzschlussstrom und U die Kurzschlussspannung der Schaltung ist. Wenn der Innenwiderstand gleich dem Lastwiderstand (R_L) ist, wird die maximale Leistung erreicht.

Messanordnung zur Messung der Rauschspannung:

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{4 \cdot k \cdot 300K \cdot 5k\Omega \cdot 50kHz} \approx 2\mu V$$

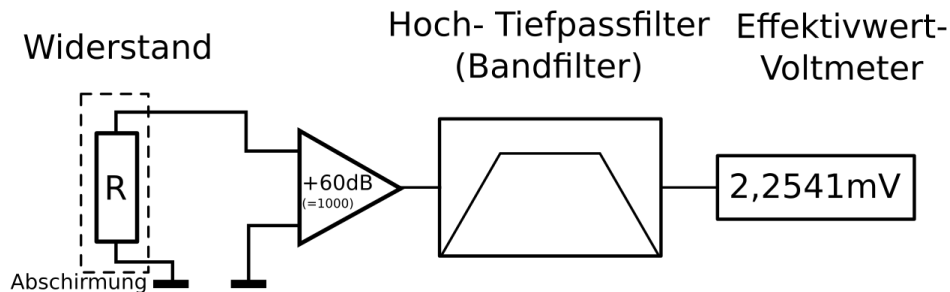


Abbildung 44: Messanordnung

3.3.3 Schrotrauschen

Das **Schrotrauschen** tritt bei Stromfluss I_0 über eine Potenzialbarriere auf, wie sie u.a. in Halbleiterbauelementen vorhanden ist. Durch die Quantisierung der Ladung ist dieser Vorgang nicht kontinuierlich, sondern setzt sich aus der Überlagerung vieler einzelner Stromimpulse zusammen. Da die Gesamtzahl der Ladungsträger innerhalb dieser Potenzialbarriere schwankt, variiert auch der Gesamtstrom (zwischen 0.2 V und 0.7 V).



Abbildung 45: Signalverlauf Schrotrauschen (klingt wie fallende Schrotkugel)

3.3.4 Quantisierungsrauschen

Die Ursache des **Quantisierungsrauschens** ist ein Fehler, der durch die Quantisierung (Digitalisierung) analoger Eingangssignale verursacht wird.

Dabei wird angenommen, dass der Fehler stetig gleichverteilt, weiß, stationär und unkorreliert ist. Weiterhin wird für das Eingangssignal angenommen, dass es mittelwertfrei und stationär ist. Diese Annahme trifft in der Praxis, z.B. auf Sprache oder Musik, zu und vor allem dann, wenn eine hinreichend hohe Quantisierungsaufösung verwendet wird.

Dieses Rauschsignal wird zum Eingangssignal addiert (an Stelle der Quantisierung) und ergibt sodann den quantisierten Wert:

$$\hat{x}(t) = x(t) + e_q(t)$$

Bsp.: Quantisierungsschritt 1V

$$5.2V = 5V + 0.2V$$

analoger Wert = digitaler Wert + Q-Rauschen

3.3.5 Gefärbtes Rauschen

Prüfungsfrage: Wie sieht das Rosa Rauschen ($\frac{1}{f}$ -Rauschen) aus?
Antwort:

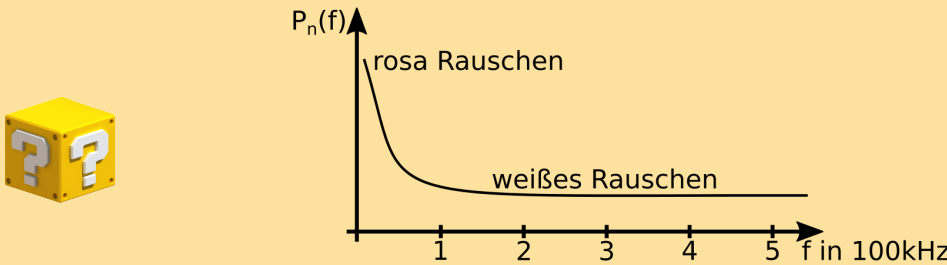


Abbildung 46: Rauschdichten für rosa Rauschen und weißes Rauschen (beide Skalen logarithmisch)

Die Netzfrequenz ist der größte "Störenfried" in der Elektrotechnik.

3.4 Kenngrößen des Rauschens

tbd next week: Rauschzahl F

4 Digitale Informationsübertragung

4.1 Einleitung

Prüfungsfrage: Worin sind die Vorteile digitaler Systeme gegenüber den analogen Systemen begründet?

Antwort:

- Vorteile der digitalen Signale gegenüber den analogen Signalen ADU, Abtasttheorem, SNR
Signalamplitude ist nicht mehr der Informationsträger
Information steckt in der Codierung des digitalen Datenwortes
- **Signalverarbeitung:** Filter (digitale Filter sind analogen überlegen), Modulation (siehe Kapitel), Anwendung mathematischer Funktionen, Offset-Kompensation
- **Bandbreite:** Durch die Abtastung erhöht sich die erforderliche Signalbandbreite (siehe Kapitel 1.1.3)
- **Übertragung:** Multiplexsysteme – Vorteile des Zeitmultiplexsystems



4.2 Die Abtasttheorie

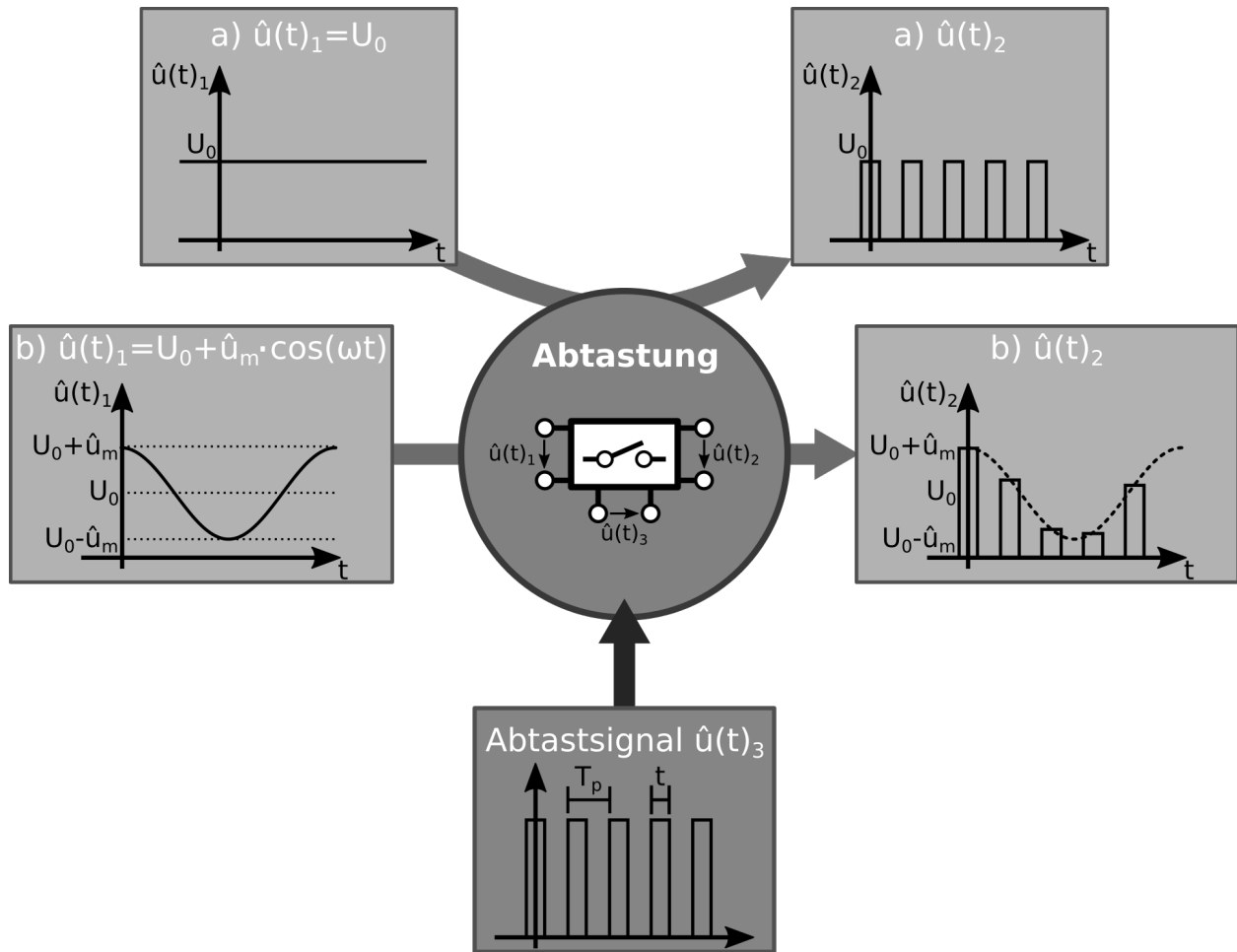


Abbildung 47: Variation der Eingangsspannung zur Erlangung eines zeitdiskreten Ausgangssignals aus einem zeit- und wert-kontinuierlichen Eingangssignal (mithilfe einer zeitdiskreten Rechteckimpulsfolge)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{T_p}$$

Spektraldarstellung der Zeitfunktion des Rechteckpulses:

$$\hat{u}(t) = hU_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{si} \left(n\omega_p \frac{t_i}{2} \right) \cdot \cos(n\omega_p t) \right]$$

$$= hU_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\text{si}(n\pi p)}_{\substack{\text{Amplituden der} \\ \text{Teilschwingungen} \\ \rightarrow \text{Spektrum } \hat{U}(f)}} \cdot \underbrace{\cos(n\omega_p t)}_{\substack{\text{Zeitverlauf der} \\ \text{Teilschwingungen}}} \right]$$

... setzt sich wie folgt zusammen:

$$u(t) = k(u_0 + \hat{u}_m \cdot \cos(\omega_m \cdot t)) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \dots \right]$$

$$u(t) = k \cdot u_0 + \tag{1}$$

$$k \cdot \hat{u}_s \cos(\omega t) + \tag{2}$$

$$2k \cdot u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \text{si}(n\omega_p \frac{t_i}{2}) \cdot \cos(n\omega_p t) + \tag{3}$$

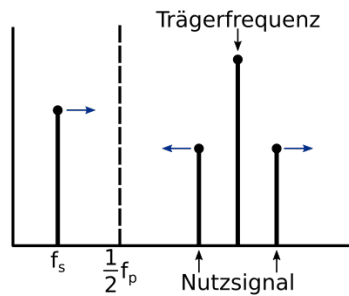
$$2 \cdot \hat{u}_m \cdot \cos(\omega_m \cdot t) \sum_{n=1}^{\infty} \text{si}(n\omega_p \frac{t_i}{2}) \cdot \cos(n\omega_p t) \tag{4}$$

(1) Gleichanteil

(2) Nutzsinal


(3) Spektrum periodischer Rechteckimpulsfolge (Amplitude vom abzutastenden Signal, Frequenz vom Abtastsignal)

$$(4) k \cdot \hat{u}_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \text{si}(n\omega_p \frac{t_i}{2}) \cdot [\cos(n(\omega_p - \omega_m) \cdot t) \cdot \cos(n(\omega_p + \omega_m) \cdot t)]$$




Bei Verschiebung der Spektrallinie von f_s (Vergrößerung der Abtastfrequenz), verschieben sich die Spektrallinien des Nutzsinals entsprechend. Bei einer Vergrößerung $> \frac{1}{2}f_p$ (Verletzung des Abtasttheorems) wird das Nutzsinal durch f_s so gestört, dass es nicht mehr wiedergewonnen werden kann.

Anti-Aliasing-Filter (Tiefpass) können dies verhindern, indem sie die Frequenzen herausfiltern, die das Nutzsinal verändern würden (zu hohe Frequenzen) und so für die Einhaltung des Abtasttheorems sorgen.



Prüfungsfrage: Wie wirkt sich eine Verletzung des Abtasttheorems aus?

Antwort: Wie aus der Spektraldarstellung ersichtlich ist, stören Frequenzanteile aus dem Abtastvorgang das Nutzsinal. Das ist schlecht.



Prüfungsfrage: Wie kann das vermieden werden aka Was ist ein Anti-Aliasing-Filter?

Antwort: Ein idealer Tiefpassfilter (Anti-Aliasing-Filter) am Eingang verhindert das Durchkommen der Störsignale, indem Frequenzen oberhalb der doppelten Maximalfrequenz herausgefiltert werden. So wird die Einhaltung des Abtasttheorems gewährleistet.

4.2.1 Gleichanteil

Beispiel: $h = \frac{1}{6} \hat{=} n = 6$

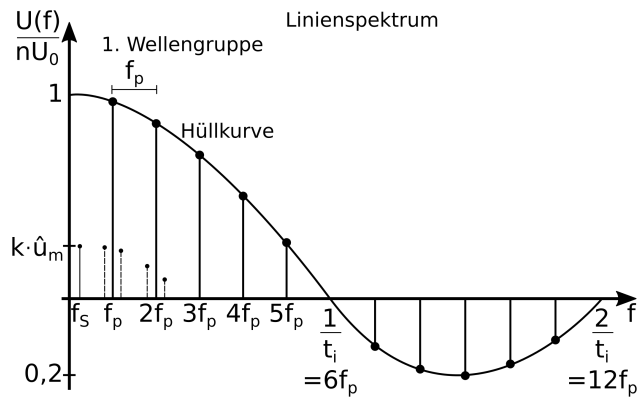


Abbildung 49: Graphische Darstellung einer Spaltfunktion und Spektrum (Quelle: Wisp S. 18)

4.3 Die Puls-Code-Modulation (PCM)

Prüfungsfrage: Wie ist ein digitaler Sender/Empfänger aufgebaut?

Antwort:

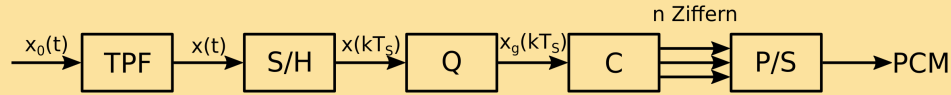


Abbildung 50: Blockdiagramm eines digitalen Senders

1. **TPF** Tiefpassfilterung zur Bandbegrenzung/Anti-Aliasing
S/H Sample and Hold (Abtastung)
 $x(kT_s)$ zeitdiskret (T ist die Abtastperiode)
Q Quantisierer
 $x_g(kT_s)$ wert- und zeitdiskret
C M-ärer Codierer
P/S parallel-seriell-Wandlung

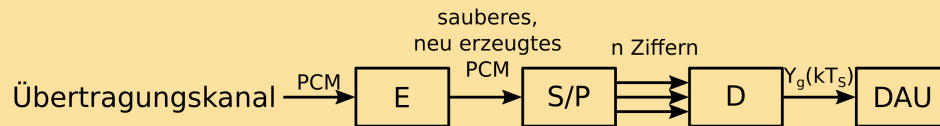


Abbildung 51: Blockdiagramm eines digitalen Empfängers

2. **E** Entscheidungsschaltung (Welches Signal entspricht welchem Wert?)
S/P seriell-parallel-Wandlung
D M-ärer Dekodierer
DAU Digital-Analog-Umwandler

Siehe auch Kapitel 0.2.3.

m -äre Kodierung: je größer m , desto stör anfälliger ist das Signal (siehe Störabstand)

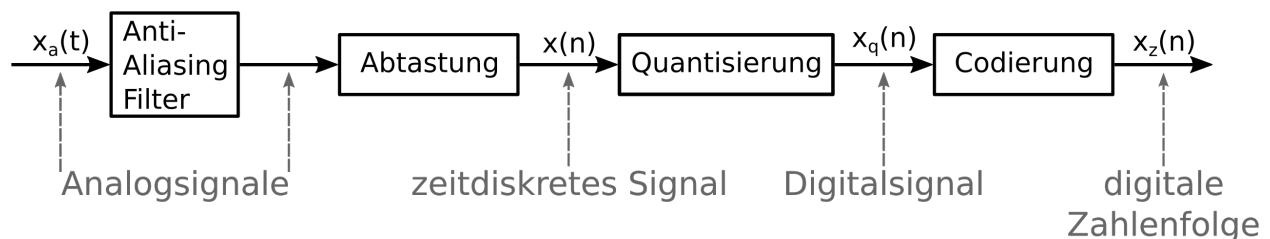


Abbildung 52: Blockschaltbild des AD-Wandlers

4.3.1 AD-Wandlung: Quantisierungskennlinien

- Annahme: B Bit stehen zur Darstellung der Amplitudenwerte zur Verfügung (B ... Wortlänge, Auflösung bzw. Wortbreite)
 $\rightarrow 2^B$ Quantisierungsintervalle können dargestellt werden (Quantisierungsintervall = Treppenhöhe)

- Gleichmäßige Quantisierung:
Der Quantisierungsbereich $[-X_{max}, X_{max}]$ wird in 2^B gleich große Intervalle unterteilt
→ Quantisierungsintervallbreite $q = 2^{-(B-1)}X_{max}$
- Quantisierungsfehler $e[n] = x_Q[n] - x[n]$
bei Rundung $-\frac{q}{2} < e \leq \frac{q}{2}$
bei Abschneiden $-q < e \leq 0$
- Bei einem Fehler, der maximal 0,1% betragen soll, ist mindestens eine Auflösung von $2^{10} = 1024$ (≥ 1000) benötigt

4.3.2 Kenngrößen

maximaler digitaler Wert: $Z_{max} = 2^n - 1$

Auflösung(n)	8 bit	10 bit	12 bit	14 bit	16 bit
Digitalisierungsschritte	256	1024	4096	16383	65536
Z (digitawdler Wertebereich)	0...255	0...1023	0...4095	0...16383	0...65535
U_{LSB}					

4.3.3 Wandlerkennlinien

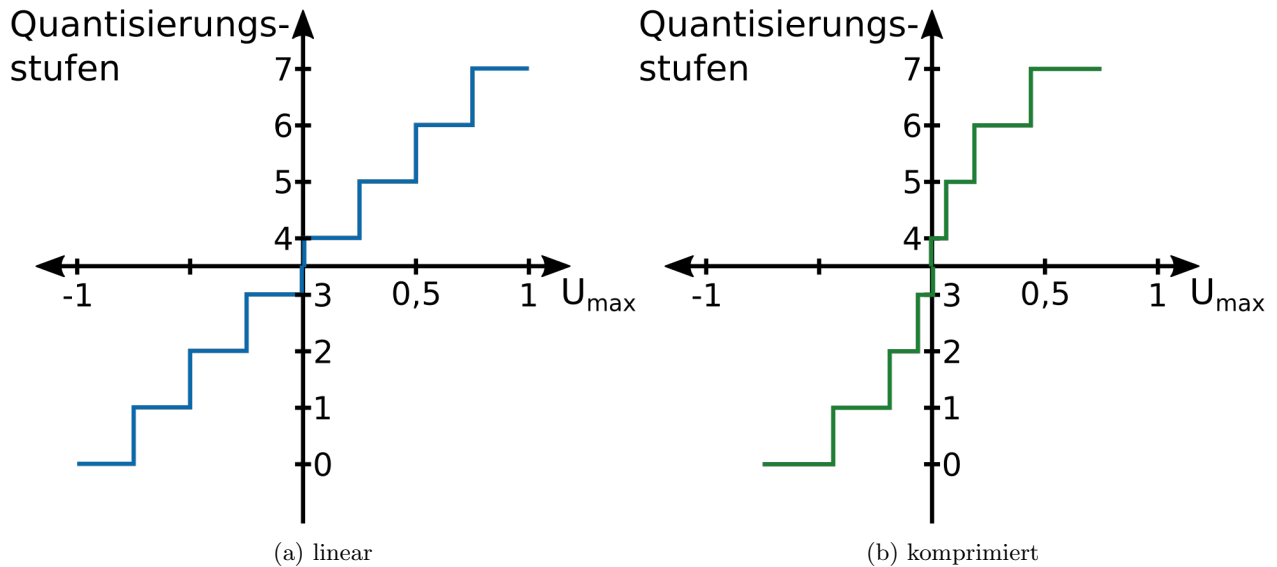


Abbildung 53: Quantisierungsstufen

Beispiel für komprimierte Quantisierungskennlinie: Telefon (leise Töne werden höher aufgelöst, "laut ist schon laut genug")

Mögliche Fehler der Kennlinie: Aliasing-Effekte bei zu grober Abtastung, (Nicht-)Linearitätsfehler

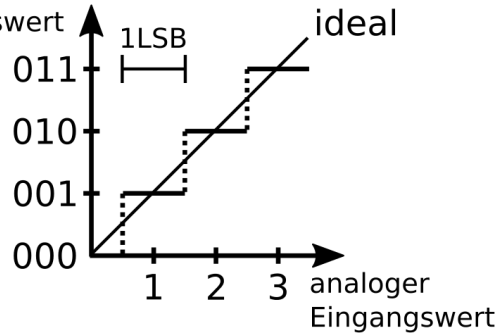
4.3.4 Quantisierungsrauschen

siehe 3.3.4

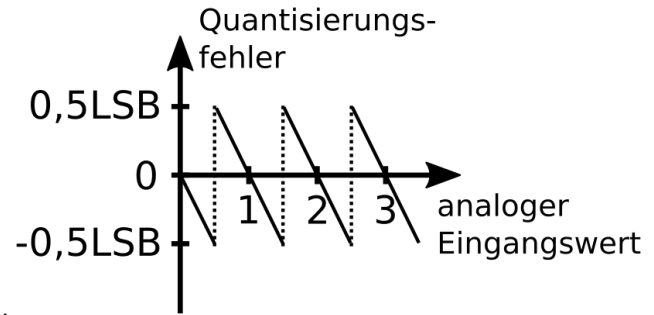
Die Quantisierung setzt ein zeitdiskretes und wertkontinuierliches Signal in ein Digitalsignal $x_q(n)$ (zeit- und wertdiskret) um.

digitaler

Ausgangswert



(a) Kennlinie



(b) Fehler

Abbildung 54: Quantisierungskennlinie und -fehler

- Ein Maß für die Auflösung ist das “least significant bit” LSB. Der Wertebereich von A_{max} bis A_{min} einer n-Bit Quantisierung in $2^n - 1$ Schritte unterteilt

$$\rightarrow 1LSB = \frac{A_{max} - A_{min}}{2^n - 1}$$

- Der Unterschied zwischen $x_q(n)$ und $x(n)$:

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$$

wird Quantisierungsfehler $e_q(n)$ oder Quantisierungsrauschen genannt

4.3.5 Das Tiefpassfilter

Prüfungsfrage: Zeichnen Sie einen TP-Filter! Was ist die Grenzfrequenz?

Antwort:

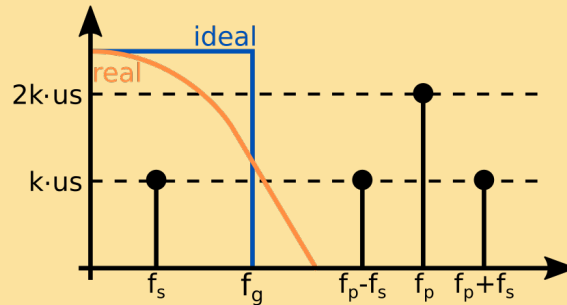


Abbildung 55: Kennlinie und Grenzfrequenz eines TP-Filters

f_s Signalfrequenz
 f_g Grenzfrequenz
 f_p Abtastfrequenz

Anwendungen:

- Begrenzung der Rauschleistung
- Unterdrückung der Signalanteile außerhalb der vorgesehenen Bandbreite um das Aliasing zu minimieren

4.3.6 Sample and Hold (Abtast- und Halteschaltung)

Für die Abtastung des Signals braucht man einen schnellen Schalter. Dies ist in der Regel ein elektronisches Bauelement, z.B. "Transistor", das übersteuert wird.

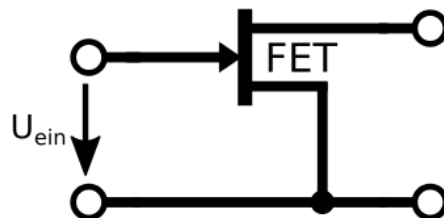


Abbildung 56: ein Feldeffekttransistor

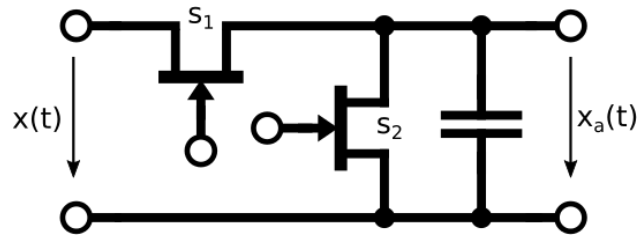


Abbildung 57: S/H-Schaltung

Prüfungsfrage: Wie funktioniert eine S/H-Schaltung?

Antwort:

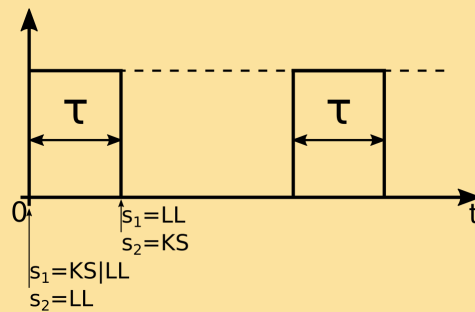


Abbildung 58: Steuerung der Schalter als Zeitfunktion

LL Leerlauf („auf“)

KS Kurzschluss („geschlossen“)

KS—LL für kurze Zeit „Kurzschluss“, dann „Leerlauf“

Zerlegung der Prozesse:

1. Aufladen
2. Halten
3. Entladen

Zum Zeitpunkt τ findet der Umsetzvorgang statt.

Prüfungsfrage: Wie funktioniert ein Parallel (Flash) ADU?

Antwort:

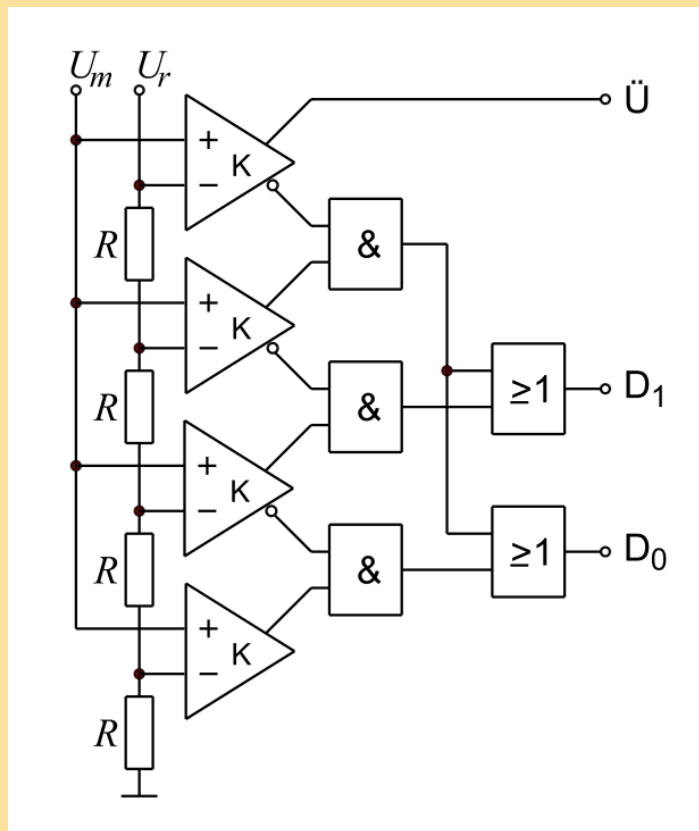


Abbildung 59: Blockschaltbild einer 2 Bit Flash ADU mit Überlauf

Grundelemente:

- Linear abgestufter Vielfach-Spannungsteiler z.B. aus einer Widerstandskette
- $2^n - 1$ Komparatoren
- Speicher+Codierer

Funktionsprinzip:

- für jeden Ausgangswert ein Komparator (Vergleich der zu messenden Spannung mit der entsprechenden Referenzspannung)
- schrittweise Erhöhung der Vergleichsspannungen
- digitaler Wert ist Nummer des letzten Komparators, der noch schaltet

Eigenschaften:

- sehr schnell (z.B. 8-bit ADC mit 50 MHz Abtastrate)
- teuer/sehr aufwendig für große n ; typisch $n \leq 8$ (maximal heutzutage: $n = 10$)

4.3.7 Codierung

- lineare Codierung

- Graycode
-

5 Wiederholungsübung Kapitel 4

5.1 Abtastung

5.1.1 Frequenzspektrum eines Sprachsignals



Prüfungsfrage: Was ist die Bandbreite?

Antwort: Am Beispiel eines Tiefpassfilters ist die Bandbreite der Bereich von 0 bis zur Grenzfrequenz.



Prüfungsfrage: Skizzieren Sie das Frequenzspektrum bei einer idealen Signalabtastung unter folgenden Bedingungen: Signalbandbreite $B = 16\text{kHz}$, Abtastfrequenz $= 1.5B$. Welche Konsequenzen hat eine solche Abtastung?

Antwort: Zusatzfragen: Wie lautet das Abtasttheorem? Was ist das Nutzsinal in der Darstellung? Kann ein idealer Filter umgesetzt werden?

5.2 Pulscodemodulation (PCM)



Prüfungsfrage: Wie sieht ein Pulsamplituden-moduliertes Signal aus?

Antwort:

5.2.1 PCM Übertragungssystem



Prüfungsfrage: Skizzieren Sie das Blockschaltbild eines PCM Übertragungssystems und erläutern Sie die Funktion und die Kenngrößen der einzelnen Komponenten.

Antwort:

5.2.2 AD-Wandler



Prüfungsfrage: a) Erläutern Sie die Funktion und die Realisierungsmöglichkeiten der einzelnen Komponenten.

Antwort:

Zusatzfragen: Was sind die ein-/ausgehenden Signale (zeit-/wert-diskret/-kontinuierlich??)



Prüfungsfrage: b) Stellen Sie den prinzipiellen Verlauf des Spektrums von $x(n)$ dar. In welcher Art und Weise beeinflussen die verschiedenen Signal-Parameter und die Abtastfrequenz das Spektrum?

Antwort:



Prüfungsfrage: Zeichnen Sie einen 3-Bit-Parallelumsetzer (minimalistisches Beispiel).

Antwort: Zusatzfragen: Welche Anforderungen werden an eine Referenzspannung gestellt? Wie groß ist eine Referenzspannung? Was ist der Unterschied zwischen einem Operationsverstärker und einem Komparator? (Im Messbereich von -5/+5 Volt,) wie kann der schaltungstechnische Aufwand (für einen 10-Bit-Umsetzer) halbiert werden?

Abbildungsverzeichnis

1	Simplex-Übertragung vom Sender zum Empfänger	4
2	Halbduplex-Übertragung abwechselnd zwischen Sender und Empfänger	4
3	Vollduplex-Übertragung simultan zwischen Sender und Empfänger	4
4	Zeitfunktion eines Zeitmultiplexers: pro Übertragungskanal ist ein fester Zeitschlitz	5
5	Spektrum der Trägerfrequenzen bei einem Frequenzmultiplex-Verfahren	5
6	Kommunikationskette: von der Quelle zur Senke	5
7	Beispiel Signaladdition: Sinuston mit $f = 1 \text{ kHz}$, $T = 1 \text{ ms}$)	6
8	Spektrum des aus Abbildung 7 resultierenden Signals	6
9	Wandlerkennlinie	7
10	Kommunikationskette: vom Sender zum Empfänger (vgl. Abb. 6)	7
11	Modulation: Nutzsignal S1 moduliert Trägersignal S2 zu S3	8
12	Unterschiede analoger und digitaler Signale	8
13	Leitungsgebundene Übertragungskanäle	9
14	Vollständiges Ersatzschaltbild für Kabel	9
15	Im Kabel parallel verlaufende Drähte wirken wie Kondensatorplatten	9
16	Ersatzschaltbild für Niederfrequenzkabel	10
17	Abschirmung einer elektrotechnischen Leitung	10
18	1. Seele oder Innenleiter, 2. Isolation oder Dielektrikum zwischen Innenleiter und Kabelschirm, 3. Außenleiter und Abschirmung, 4. Schutzmantel	10
19	Mischspannung in einem Koaxialkabel	11
20	Klassen von Signalen	12
21	Zeigerdarstellung komplexer Zahlen	13
22	Abtasten eines Rechtecksignals mit unterschiedlichen f_{abtast}	14
23	Gerade und ungerade Funktionen	15
24	Relevante Größen für die Berechnung des Spektrums einer Rechteckfunktion	15
25	Relevante Größen für die Überführung der Fourier-Reihe ins Fourier-Integral	17
26	Normierte Darstellung der Hüllkurve des aus Abb. 25 berechneten Spektrums	17
27	Der Großteil der Leistung ist im markierten Bereich ablesbar	19
28	Problemlösung mithilfe der Fouriertransformation	20
29	Frequenzverschiebung bei der Amplitudenmodulation	21
30	Analoges \leftrightarrow Digitales Modulationssignal	22
31	Berechnung der Übertragungslatenz eines Übertragungskanals	23
32	Pulsdauer τ mal Bandbreite $B \approx 1$	24
41	weißes Rauschen am ohmschen Widerstand	37
42	Ersatzschaltbild eines rauschenden Widerstands	38
43	Schaltung zur Leistungsanpassung	38
44	Messanordnung	39
45	Signalverlauf Schrotrauschen (klingt wie fallende Schrotkugel)	39
46	Rauschdichten für rosa Rauschen und weißes Rauschen (beide Skalen logarithmisch)	40
47	Variation der Eingangsspannung zur Erlangung eines zeitdiskreten Ausgangssignals aus einem zeit- und wert-kontinuierlichen Eingangssignal (mithilfe einer zeitdiskreten Rechteckimpulsfolge)	42
49	Graphische Darstellung einer Spaltfunktion und Spektrum (Quelle: Wisp S. 18)	44
50	Blockdiagramm eines digitalen Senders	45
51	Blockdiagramm eines digitalen Empfängers	45
52	Blockschaltbild des AD-Wandlers	45
53	Quantisierungsstufen	46
54	Quantisierungskennlinie und -fehler	47
55	Kennlinie und Grenzfrequenz eines TP-Filters	48
56	ein Feldeffekttransistor	48

57	S/H-Schaltung	49
58	Steuerung der Schalter als Zeitfunktion	49
59	Blockschaltbild einer 2 Bit Flash ADU mit Überlauf	50