

Zur Quasikonvexität ausgewählter Einmaschinenprobleme

Dieter Muchow, Frank Werner

In dieser Arbeit werden Grundlagen zur Quasikonvexität von Permutationsproblemen zusammengestellt und ausgewählte Nachbarschaftsgraphen eingeführt. Danach werden drei polynomial lösbare Einmaschinenprobleme betrachtet und die Eigenschaft der Quasikonvexität ihrer Zielfunktionen auf speziellen Strukturgraphen nachgewiesen.

1. Einführung

In der diskreten Optimierung spielt die Untersuchung der Struktur der Lösungsmenge und der Zielfunktion ausgewählter Problemstellungen eine zunehmende Rolle. In dieser Arbeit werden Struktureigenschaften für Probleme der Gestalt

$$\min \{F(p) \mid p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in X \subseteq P_m\} \quad (1)$$

abgeleitet. Dabei bezeichnet $P_m = P(M)$ die Menge aller Permutationen der Elemente von $M = \{1, 2, \dots, m\}$. F sei eine eindeutige Abbildung der Menge X in den R^1 .

Mannigfaltige Maschinenbelegungsprobleme lassen sich auf Probleme des Typs (1) zurückführen, u. a. Permutationsflußprobleme, Flußprobleme mit bis zu 3 Maschinen und alle Einmaschinenprobleme. Darunter sind Probleme recht unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades. Einerseits existieren für ganz spezielle Problemstellungen äußerst einfache Lösungsregeln (vgl. z. B. [7]), andererseits führen bereits geringfügige Verallgemeinerungen zu Problemen der Klasse NP-hard. Daher ergibt sich unmittelbar die Frage nach gemeinsamen Eigenschaften der Zielfunktionen, die die Trennlinie zwischen polynomial lösbaren und NP-hard Problemen näher charakterisieren.

In [16] erfolgt eine adäquate Übertragung des Begriffs der Quasikonvexität von Zielfunktionen nichtdiskreter Optimierungsprobleme auf Probleme der Gestalt

$$\min \{F(p) \mid p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in P_m\} \quad (2)$$

mit graphentheoretischen Mitteln auf der Basis spezieller Nachbarschaften in P_m . Eine äquivalente algebraische Definition wird in [2] erarbeitet. Beide Definitionen können auf Probleme der Gestalt (1) verallgemeinert werden, wobei eine Möglichkeit geschaffen wird, einen Beitrag zur Untersuchung der Struktur von Zielfunktionen dieser Probleme zu leisten.

Dabei ergibt sich ein enger Zusammenhang zu den Untersuchungen zur Bestimmung minimaler exakter Nachbarschaften (vgl. [12], [13], wobei es um die Frage geht, wieviel Nachbarn eine zulässige Lösung besitzen muß, damit ein lokales Optimum zugleich globales Optimum ist. Für das Rundreiseproblem wird in [14] gezeigt, daß die minimale exakte Nachbarschaft exponentiell viele Nachbarn umfaßt. Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht im Nachweis der Quasikonvexität der Zielfunktionen ausgewählter polynomial lösbarer Einmaschinenprobleme auf speziellen Nachbarschaftsgraphen. Dabei werden die Untersuchungen auch mit Blick auf die Frage geführt, ob für polynomial lösbare Probleme stets eine Nachbarschaft geringer Mächtigkeit (insbesondere mit polynomial beschränkter Anzahl von Nachbarn) existiert, die die Quasikonvexität liefert.

Abschnitt 2 enthält eine kurze Zusammenstellung wesentlicher Grundlagen und Aussagen zur Quasikonvexität. In Abschnitt 3 werden ausgewählte Permutationsgraphen für das Problem (2) aufgeführt und einige Eigenschaften eines speziellen Graphen abgeleitet. Die Vorstellung ausgewählter Einmaschinenprobleme und der Nachweis der Quasikonvexität ihrer Zielfunktionen auf den eingeführten Strukturgraphen bilden den Inhalt des Abschnitts 4.

2. Zur Quasikonvexität von Permutationsproblemen

Als Ausgangspunkt der Betrachtungen sei das Problem (1) gewählt. Zur Beschreibung einer Nachbarschaftsstruktur in der Menge $X \subseteq P_m$ wird nachfolgend ein geeigneter Graph $G(m)$ verwendet. $N(p, G)$ bezeichne die Menge aller Nachbarn von $p \in X$ in $G(m)$. Eine Nachbarschaft wird symmetrisch genannt, falls $p' \in N(p, G)$ gilt, genau dann wenn $p \in N(p', G)$ ist.

Eine symmetrische Nachbarschaft kann durch einen ungerichteten Graphen $G(m) = (X, U)$ beschrieben werden. Die Knotenmenge wird dabei durch X gebildet. Für die Kantenmenge gilt

$$U = \{(p, p') \in X^2 \mid p' \in N(p, G(m))\}.$$

In $G(m) = (X, U)$ wird eine Folge p^1, p^2, \dots, p^l mit $p^i \in X$ ($i = 1, \dots, l$), wobei $(p^j, p^{j+1}) \in U$ gilt ($j = 1, \dots, l-1$), als Kette bezeichnet. Die Kette heißt einfach, falls in ihr nicht zweimal derselbe Knoten auftritt. Die Länge einer Kette sei die Anzahl ihrer Kanten. Unter der Länge $l(p^1, p^2, G)$ zwischen den Knoten p^1 und p^2 in $G(m)$ wird die Länge der kürzesten Kette zwischen p^1 und p^2 verstanden. Für $p^1 \in P_m$ sei $z_s(G, p^1) = |\{p^2 \in P_m \mid l(p^1, p^2, G) = s\}|$. Für die im Abschnitt 3 vorgestellten Permutationsgraphen ist $z_s(G, p^1)$ unabhängig von der Wahl von $p^1 \in P_m$ und wird daher mit $z_s(G)$ bezeichnet.

Sei $G(m) = (X, U)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Nachbarschaftsgraph. Auf $G(m)$ wird die Quasikonvexität bzw. die strenge Quasikonvexität von Zielfunktionen des Problems (1) definiert.

Definition 1: F heißt quasikonvex auf $G(m)$, falls aus $p^1, p^2 \in X$ mit $F(p^2) \leq F(p^1)$ folgt, daß in $G(m)$ mindestens eine p^1 und p^2 verbindende einfache Kette $K[p^1, p^2]$ mit der Eigenschaft $F(p) \leq F(p^1)$ für alle $p \in K[p^1, p^2]$ existiert.

Definition 2: Eine quasikonvexe Funktion F heißt streng quasikonvex, falls aus $p^1, p^2 \in X$ mit $F(p^2) < F(p^1)$ folgt, daß in $G(m)$ mindestens eine p^1 und p^2 verbindende einfache Kette $K[p^1, p^2]$ mit der Eigenschaft $F(p) < F(p^1)$ für alle $p \in K[p^1, p^2], p \neq p^1$, existiert.

In Anlehnung an die quasikonvexe nichtdiskrete Optimie-

rung gelten folgende Sätze, deren Beweise jeweils in [16] zu finden sind.

Theorem 1: Ist die Zielfunktion F streng quasikonvex auf $G(m)$, so ist jedes lokale Optimum zugleich ein globales Optimum.

Theorem 2: Ist die Zielfunktion F quasikonvex auf $G(m)$, so bildet die Menge der globalen Optima einen zusammenhängenden Untergraphen von $G(m)$.

Ein Permutationsproblem soll im folgenden quasikonvex (streng quasikonvex) auf $G(m)$ genannt werden, wenn die Zielfunktion des Problems die Eigenschaft der Quasikonvexität (der strengen Quasikonvexität) auf $G(m)$ besitzt.

Die obigen Aussagen bilden die Grundlage für die Ableitung einer einheitlichen Lösungsmethodik. Für quasikonvexe bzw. streng quasikonvexe Probleme kann ein Abstiegsalgorithmus angegeben werden, der stets zum globalen Optimum führt (vgl. [2]). Nachfolgend wird in dieser Arbeit lediglich die Quasikonvexität betrachtet.

Eine Möglichkeit des Nachweises der Quasikonvexität eines Problems auf $G(m)$ besteht darin, die Existenz eines $p^* \in X$ zu zeigen, so daß in $G(m)$ zwischen jeder beliebigen Lösung $p \in X$ und p^* eine einfache Kette $K[p, p^*]$ vorhanden ist, entlang derer der Zielfunktionswert monoton nichtwachsend ist (vgl. [18]).

Im Zusammenhang mit der Quasikonvexität können 2 Untersuchungsrichtungen als besonders interessant angesehen werden.

(1) Bei Vorgabe eines geeigneten Nachbarschaftsgraphen $G(m)$ wird untersucht, welche Permutationsprobleme auf $G(m)$ die Eigenschaft der Quasikonvexität besitzen. Auf diesem Wege besteht die Möglichkeit, einen Beitrag zur Ableitung gemeinsamer Eigenschaften verschiedenartiger Permutationsprobleme zu leisten.

(2) Falls ein Permutationsproblem quasikonvex auf $G_1(m) = (X, U_1)$ ist, so auch auf $G_2(m) = (X, U_2)$ mit $U_1 \subseteq U_2$. Gleichzeitig besitzt jedes Problem auf dem vollständigen Graphen die Eigenschaft der Quasikonvexität. Daher kann ein Ziel der Untersuchungen auch darin gesehen werden, für ein gegebenes Problem eine solche Kantenmenge U zu bestimmen, so daß die Zielfunktion auf $G(m)$ quasikonvex ist und dabei jede Lösung eine möglichst geringe Anzahl von Nachbarn in $G(m)$ besitzt. Auf diese Weise können Erkenntnisse über die Struktur des konkreten Problems gewonnen werden. Diese Herangehensweise steht in Verbindung mit den Untersuchungen zur Bestimmung minimaler exakter Nachbarschaften (vgl. Abschnitt 1).

Nachfolgend werden im Abschnitt 3 ausgewählte Permutationsgraphen für das Problem (2) vorgestellt.

3. Spezielle Permutationsgraphen für das Problem $\min \{F(p) \mid p \in P_m\}$

Eine mögliche Nachbarschaftsstruktur für das Problem (2) entsteht aus der Eckpunkt-Nachbarschaft des Zuordnungspolyeders. Als zugehöriges Graphenmodell ergibt sich der Graph $G_B(m) = (P_m, U_B)$ der Basistransformationen mit $U_B = \{(p, p') \in P_m^2 \mid p' = p^z \cdot p, p^z \text{ zyklisch}\}$. Dabei gilt

$$|N(p, G_B(m))| = \sum_{r=2}^m \binom{m}{r} \cdot (r-1)! \text{ für } p \in P_m, \text{ und somit hat}$$

p exponentiell viele Nachbarn. Daher empfiehlt sich die Betrachtung von Teilgraphen von $G_B(m)$ mit polynomial beschränkter Anzahl von Nachbarn. Eine Möglichkeit besteht in der Beschränkung auf die Graphen $G_B^r(m) = (P_m, U_B^r)$ mit $U_B^r = \{(p, p') \in P_m^2 \mid p' = p^z \cdot p, p^z \text{ zyklisch mit der Länge } r\}$. Hinsichtlich der Anwendung bei lokalen deterministischen und randomisierten Suchverfahren hat dabei

der Graph $G_B^2(m)$, der den sogenannten Austauschverfahren zugrunde liegt, besondere Bedeutung. In $G_B^2(m)$ wird ein Nachbar nachfolgend auch mit $p' = A_{ij}(p)$ bezeichnet, wobei p' durch Austausch des i -ten und des j -ten Elements von p entsteht. Ein Teilgraph von $G_B^2(m)$ ist der Nachbartauschungsgraph $G_V(m) = (P_m, U_V)$, bei dem ein Nachbar jeweils durch Vertauschung zweier benachbarter Elemente in der Ausgangspermutation entsteht. Für die weiteren Betrachtungen sei $V_{ij}(p)$ die aus p entstehende Permutation, wenn das i -te Element in p auf Position j angeordnet wird. Dies führt zu dem Shiftgraphen $G^S(m) = (P_m, U^S)$ mit $U^S = \{(p, p') \in P_m^2 \mid p' = V_{ij}(p), 1 \leq i, j \leq m, i \neq j\}$. Dabei ist $G^S(m)$ offenbar auch ein Teilgraph von $G_B(m)$. Eine Verallgemeinerung von $G^S(m)$ stellt der sogenannte Blockvertauschungsgraph $G^{BL}(m) = (P_m, U^{BL})$ dar, wobei

$$U^{BL} = \{(p, p') \in P_m^2 \mid p' = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{j+1}, \dots, p_k, p_i, \dots, p_j, p_{k+1}, \dots, p_m), 1 \leq i \leq j < k \leq m\}.$$

Somit entsteht in $G^{BL}(m)$ ein Nachbar p' von p durch eine (B_1, B_2) -Blockvertauschung mit $B_1 = \{p_i, \dots, p_j\}$ und $B_2 = \{p_{j+1}, \dots, p_k\}$. Allerdings gilt für diesen Graphen bereits $|N(p, G^{BL}(m))| = m \cdot (m^2 - 1)/6$, d. h. es existieren bereits $O(m^3)$ -Nachbarn von p . Für $m \geq 4$ ist $G^{BL}(m)$ kein Teilgraph von $G_B(m)$. Für die vorgestellten Permutationsgraphen sind in [17] bzw. [19] eine Reihe von Eigenschaften abgeleitet.

Die eingeführten Graphen sind auf Probleme der Gestalt (1) übertragbar. Sei $G(m) = (P_m, U)$ ein beliebiger Nachbarschaftsgraph für das Problem (2). Dann bezeichne $G(m) = (X, \underline{U})$ mit $\underline{U} = \{(p, p') \in U \cap X^2\}$ den entsprechenden Graphen für das Problem (1).

Sei $G(m)$ ein beliebiger Nachbarschaftsgraph für Problem (2). Dann bezeichne $f-G(m)$ den Graphen, bei dem $p' \neq p$ ein Nachbar von p ist, falls in $G(m)$ zwischen p und p' eine Kette mit höchstens f Kanten existiert, d. h. $N(p, f-G(m)) = \{p' \in P_m \mid 1 \leq l(p, p', G) \leq f\}$.

Es wird nachfolgend der Graph $2-G^S(m)$ betrachtet. Aus den Eigenschaften von $G^S(m)$ folgt, daß $2-G^S(m)$ den Gürtel 3 und den Durchmesser $\lceil (m-1)/2 \rceil$ für $m \geq 3$ besitzt (bzgl. der Begriffe Gürtel und Durchmesser sei auf [17] verwiesen). Abschließend wird $|N(p, 2-G^S(m))|$ bestimmt. Zuvor werden noch folgende Bezeichnungen eingeführt. Seien G^1 und G^2 zwei ungerichtete Graphen mit gleicher Knotenmenge. Dann sei $G^1 \setminus G^2$ der Differenzgraph, d. h. in der Kantenmenge von G^1 werden alle Kanten gestrichen, die zur Kantenmenge von G^2 gehören. Im weiteren bezeichne p_j , sofern nicht anders vermerkt, jeweils das j -te Element einer Permutation p , und $Po(p, i)$ die Position des Elements i in p . Ferner sei $p \setminus i$ die aus p durch Streichung des Elements i entstehende Permutation. Schließlich bezeichne $p^e \in P(H)$ jeweils die Permutation, in der die Elemente von H in aufsteigender Reihenfolge angeordnet sind (d. h. $p^e \in P(M)$ ist die identische Permutation). Weiter wird unter $d(p, p')$ der übliche Inversionsabstand zwischen zwei Permutationen $p, p' \in P_m$ verstanden, d. h.

$$d(p, p') = |\{(i, j) \in M^2 \mid Po(p, i) < Po(p, j) \wedge Po(p', i) > Po(p', j)\}|.$$

Der folgende Satz liefert eine rekursive Berechnungsmöglichkeit für $z_2(G^S(m))$.

Theorem 3: Es gilt folgende Rekursionsbeziehung in $G^S(m)$ für $m \geq 4$:

$$z_2(G^S(m)) = z_2(G^S(m-1)) + (m-3) \cdot z_1(G^S(m-1)) + (m-1) \cdot z_1(G^S(m-2)) + z_1(G^S(m-3)) + m^2 - m - 7$$

mit $z_2(G^S(1)) = z_2(G^S(2)) = 0$ und $z_2(G^S(3)) = 1$.

Beweis: Offenbar gilt $z_2(G^S(1)) = z_2(G^S(2)) = 0$ und $z_2(G^S(3)) = 1$. Seien $m \geq 4$ sowie $p, \bar{p} \in P_m$ und $p' = \bar{p} \cdot p$. Dabei gilt $l(p, p', G^S) = 2$ genau dann, wenn $l(p^e, \bar{p}, G^S) = 2$ (3) ist. Nachfolgend werden alle derartigen Permutationen \bar{p} mit dieser Eigenschaft abgeleitet:

a) Sei $\bar{p}_m = m$, d. h. $Po(\bar{p}, m) = m$. Dann erfüllen alle Permutationen $p^* \in P_{m-1}$ mit $l(p^e, p^*, G^S) = 2$ die Bedingung (3). Folglich gibt es $z_2(G^S(m-1))$ Permutationen $\bar{p} = (p^*, m)$ in diesem Fall.

b) Sei $\bar{p}_{m-1} = m$. Dann gibt es $m-1$ Möglichkeiten zur Wahl von \bar{p}_m . Sei $p^* = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{m-2}) \in P(M \setminus \{m, \bar{p}_m\})$. Dann gilt (3) genau dann, wenn $l(p^e, p^*, G^S) = 1$. Folglich gibt es $(m-1) \cdot z_1(G^S(m-2))$ Permutationen \bar{p} in diesem Fall.

c) Sei $\bar{p}_{m-2} = m$. Dann sind folgende Fälle zu betrachten:

c1) Sei $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{m-3}) = p^e \in P(M \setminus \{m, \bar{p}_{m-1}, \bar{p}_m\})$. Dann gibt es $\binom{m-1}{2}$ Möglichkeiten der Auswahl von \bar{p}_{m-1} und \bar{p}_m aus der Menge $\{1, \dots, m-1\}$, wobei jeweils zwei Zuordnungen möglich sind. Lediglich für $\bar{p} = (1, \dots, m-3, m, m-2, m-1)$ gilt $l(p^e, \bar{p}, G^S) = 1$. Somit gibt es $2 \cdot \binom{m-1}{2} - 1$ Permutationen \bar{p} in diesem Fall.

c2) Seien $\bar{p}_{m-1} = m-2$ und $\bar{p}_m = m-1$. Ferner sei $p^* = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{m-3})$. Dann gilt (3) genau dann, wenn $l(p^e, p^*, G^S) = 1$ gilt. Somit gibt es $z_1(G^S(m-3))$ Permutationen \bar{p} in diesem Fall.

c3) Seien $Po(\bar{p}, m-2) < m-2$ und $\bar{p} \setminus \{m-2, m\} = p^e$. Der Fall $\bar{p}_{m-3} = m-2$ ist in c1) enthalten. Für $Po(\bar{p}, m-2) \leq m-4$ ist \bar{p} jeweils nicht in c1) enthalten, und somit gibt es in diesem Fall $m-4$ Permutationen \bar{p} .

c4) Seien $Po(\bar{p}, m-1) < m-2$ und $\bar{p} \setminus \{m-1, m\} = p^e$. Analog zu c3) gibt es $m-4$ Permutationen \bar{p} in diesem Fall.

d) Sei $\bar{p}_i = m$ mit $1 \leq i \leq m-3$. Ferner sei $p^* = \bar{p} \setminus m$. Es gilt (3) genau dann, wenn $l(p^e, p^*, G^S) = 1$. Somit gibt es für festes i jeweils $z_1(G^S(m-1))$ Permutationen p^* mit dieser Eigenschaft und daher insgesamt $(m-3) \cdot z_1(G^S(m-1))$ Permutationen \bar{p} in diesem Fall.

Aus den Fällen a) bis d) ergibt sich nach Zusammenfassung die Behauptung.

q. e. d.

Die folgende Aussage liefert eine rekursionsfreie Berechnungsmöglichkeit für $z_2(G^S(m))$.

Theorem 4: Es gilt $z_2(G^S(m)) = m^4/4 - 3m^3 + 11m^2/2 - 3m + 1$ für $m \geq 4$.

Beweis: Sei $p = (p_1, \dots, p_m) \in P_m$ mit $m \geq 4$ beliebig. Wir geben alle Permutationen p'' an, für die $l(p, p'', G^S) = 2$ gilt. Es sind die folgenden Fälle zu betrachten.

a) Es werden zwei Transformationen $p' = V_{i,i+1}(p)$ und $p'' = V_{g,g+1}(p')$ mit $1 \leq i, g \leq m-1$ und $|i-g| > 1$ ausgeführt (jede der beiden Nachbarvertauschungen kann als erste ausgeführt werden). O.B.d.A. sei $i < g$. Für $1 \leq i \leq m-3$ erhält man jeweils $m-i-2$ Möglichkeiten zur Wahl von $g(i+2 \leq g \leq m-1)$.

Somit gibt es in diesem Fall

$$z_a = \sum_{k=1}^{m-3} k = (m-3) \cdot (m-2)/2$$

Permutationen p'' mit $l(p, p'', G^S) = 2$.

b) Es wird zunächst eine Transformation

$$(I) \quad p' = V_{i,i+1}(p)$$

sowie danach eine Transformation

$$(II) \quad p'' = \begin{cases} V_{g,i+1}(p') & \text{falls } g > i+1 \\ V_{gi}(p') & \text{falls } g < i \end{cases}$$

ausgeführt (d. h. p'_g wird zwischen den vertauschten Nachbarlementen angeordnet).

Zunächst gibt es $m-1$ Möglichkeiten für Transformation (I). Im Fall $i=1$ bzw. $i=m-1$ gibt es jeweils $m-3$ Möglichkeiten für Transformation (II), so daß $l(p, p'', G^S) = 2$ gilt ($g > 3$ bzw. $g < m-2$). Im Fall $2 \leq i \leq m-2$ gibt es jeweils $m-4$ Möglichkeiten für Transformation (II), so daß $l(p, p'', G^S) = 2$ ($g \neq i-1, i, i+1, i+2$). Da $m-3$ Permutationen $p'' = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+3}, p_i, p_{i+2}, p_{i+4}, \dots, p_m)$ doppelt entstehen, erhält man in diesem Fall

$$z_b = (m-1) \cdot (m-4) + 2 - (m-3) = (m-3)^2$$

Permutationen p'' mit $l(p, p'', G^S) = 2$.

c) Es werden zwei Transformationen des Typs

$$(I) \quad p' = V_{i,i+1}(p) \quad \text{sowie}$$

$$(II) \quad p'' = V_{gh}(p') \quad \text{mit } |g-h| > 1, g \notin \{i, i+1\}$$

$$h \neq \begin{cases} i+1 & \text{falls } g > h \\ i & \text{falls } g < h \end{cases} \quad (\text{ist in Fall b enthalten})$$

ausgeführt. Es gibt $m-1$ Möglichkeiten für Transformation (I).

Für jedes p' gibt es $m-2$ Möglichkeiten für die Auswahl von g . In Abhängigkeit von i und g gibt es jeweils folgende Möglichkeiten zur Wahl von h für die Erzeugung von p'' : $m-2$ falls $i=2$ und $g=1$ bzw. $i=m-2$ und $g=m$ gilt, (4) $m-3$ falls (4) nicht erfüllt ist und $g=i-1$ oder $g=i+2$ oder $g=1$ oder $g=m$ gilt bzw.

$m-4$ sonst.

Dabei entstehen $z_1 = m-2$ Permutationen der Form $p'' = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+2}, p_{i+1}, p_i, p_{i+3}, \dots, p_m)$ doppelt. Somit erhält man in diesem Fall

$$z_c = (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-4) + 4 \cdot (m-2) - z_1 = (m-2) \cdot [(m-1) \cdot (m-4) + 3]$$

Permutationen p'' mit $l(p, p'', G^S) = 2$.

d) Es werden zwei Transformationen

$$(I) \quad p' = V_{ij}(p) \quad \text{mit } |i-j| > 1 \quad \text{sowie}$$

$$(II) \quad p'' = \begin{cases} V_{i,i+1}(p') & \text{falls } i > j \\ V_{i-1,i}(p') & \text{falls } i < j \end{cases}$$

ausgeführt (d. h. die zweite Transformation ist in p' eine Nachbarvertauschung zweier in p nicht benachbarter Elemente). Es gibt $|N(p, G^S \setminus G_V(m))|$ Möglichkeiten für Transformation (I). Da aber Transformation (II) nur möglich ist, falls $2 \leq i \leq m-1$ gilt, entfallen $2 \cdot (m-2)$ Permutationen aus $N(p, G^S \setminus G_V(m))$. Ferner entstehen $m-3$ Permutationen $p'' = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+2}, p_i, p_{i+3}, p_{i+1}, p_{i+4}, \dots, p_m)$ doppelt, und man erhält in diesem Fall

$$z_d = |N(p, G^S \setminus G_V(m))| - 2 \cdot (m-2) - (m-3) = (m-3)^2$$

Permutationen p'' mit $l(p, p'', G^S) = 2$.

e) Es wird eine Transformation

$$(I) \quad p' = V_{ij}(p) \quad \text{mit } |i-j| > 1$$

ausgeführt. Sei $p^* = p' \setminus p_i$. Im zweiten Schritt wird eine Transformation

$$(II) \quad p^{**} = V_{gh}(p^*) \quad \text{mit } |g-h| > 1$$

ausgeführt. Die dabei aus P_m erhaltene Permutation wird mit p'' bezeichnet.

Es gibt $|N(p, G^S \setminus G_V(m))| = (m-1) \cdot (m-2)$ Möglichkeiten für Transformation (I). Zunächst gibt es dann $|N(p, G^S \setminus G_V(m-1))| = (m-2) \cdot (m-3)$ Möglichkeiten für Transfor-

mation (II). Hinzu kommen weitere Möglichkeiten, da im Fall

$$h = \begin{cases} j-1 & \text{falls } g < h \\ j & \text{falls } g > h \end{cases}$$

das Element p_g^* in p' vor bzw. nach p_i angeordnet werden kann. Dann entstehen für $j=1, i \geq 3$ bzw. $j=m, i \leq m-2$ (insgesamt $2 \cdot (m-2)$ Permutationen p') jeweils $m-3$ weitere Permutationen p'' , für $j=2, i \geq 4$ bzw. $j=m-1, i \leq m-3$ (insgesamt $2 \cdot (m-3)$ Permutationen p') jeweils $m-4$ weitere Permutationen p'' , und in allen anderen Fällen für p' ergeben sich $\max\{0, m-5\}$ weitere Permutationen p'' . Somit ergeben sich insgesamt

$$z_1 = |N(p, G^S \setminus G_V(m))| \cdot \max\{0, m-5\} + 2 \cdot (m-3) + 4 \cdot (m-2)$$

zusätzliche Erzeugungsmöglichkeiten für p'' . Darüber hinaus entfallen solche Transformationen, bei denen $d(p, p') = 2$ (5) gilt und für die

$$g \in \{i, i+1\} \text{ für } i < j \text{ bzw. } g \in \{i-2, i-1\} \text{ für } i > j$$

erfüllt ist (Fall c bzw. d). Es gibt $2 \cdot (m-2)$ Permutationen $p' \in N(p, G^S(m))$ mit (5). Für $i=1, j=3$, bzw. $i=3, j=1$ bzw. $i=m-2, j=m$ bzw. $i=m, j=m-2$ sind dies jeweils $2m-7$ Erzeugungsmöglichkeiten für p'' , andernfalls jeweils $2m-8$. Somit entfallen

$$z_2 = 2 \cdot (m-2) \cdot (2m-8) + 4$$

Erzeugungsmöglichkeiten für p'' .

Die in dem betrachteten Fall durch Transformationen des Typs (I) und (II) entstehenden Permutationen lassen sich zunächst auf zwei verschiedene Möglichkeiten erzeugen (die Reihenfolge der Ausführung der Transformationen ist beliebig). Jedoch gibt es verschiedene Permutationen p'' , die auf drei bzw. vier verschiedene Möglichkeiten erzeugbar sind. Nachfolgend werden alle derartigen Permutationen p'' angegeben.

Dazu wird die Anzahl der Permutationen p'' ermittelt, die durch folgende Transformationen entstehen:

$$p' = V_{ij}(p), p'' = V_{gt}(p'), \quad (6)$$

wobei für p bzw. $p^* = p' \setminus p_i$ (I) bzw. (II) erfüllt sind. Dann gibt es für $i=1, j \geq 3$ bzw. $i=m, j \leq m-2$ (insgesamt $2 \cdot (m-2)$ Permutationen p') jeweils $m-3$ Erzeugungsmöglichkeiten für p'' , für $i=2, j \geq 4$ bzw. $i=m-i, j \leq m-3$ (insgesamt $2 \cdot (m-3)$ Permutationen p') jeweils $m-4$ Erzeugungsmöglichkeiten für p'' , und in allen anderen Fällen für p' ergeben sich $\max\{0, m-5\}$ Erzeugungsmöglichkeiten für p'' .

$$\text{Falls } p'' = A_{ij}(p) \text{ mit } |i-j| \geq 3 \quad (7)$$

gilt, dann gibt es 4 Möglichkeiten der Ausführung von zwei Transformationen (I) und (II), und alle sind gemäß (6) er-

hältlich. Insgesamt gibt es $\sum_{i=1}^{m-3} i$ Permutationen p'' mit (7).

Alle restlichen Permutationen $p' \in N(p, G_B^2(m))$ gemäß (6) sind durch drei verschiedene Möglichkeiten der Ausführung von zwei Transformationen des Typs (I) bzw. (II) erzeugbar, wobei die Erzeugung gemäß (6) jeweils eindeutig ist. Außerdem gibt es $m-3$ Permutationen $p'' = (p_b, \dots, p_{i-1}, p_{i+2}, p_{i+3}, p_b, p_{i+1}, p_{i+4}, \dots, p_m)$, für die ebenfalls 4 Möglichkeiten der aufeinanderfolgenden Ausführung von Transformationen des Typs (I) bzw. (II) existieren. Alle restlichen Permutationen in diesem Fall e) sind wie bereits erwähnt durch zwei verschiedene Möglichkeiten der Ausführung von Transformationen des Typs (I) und (II) er-

zeugbar. Somit gibt es

$$z_3 = |N(p, G^S \setminus G_V(m))| \cdot \max\{0, m-5\} + 2 \cdot (m-3) + 4 \cdot (m-2) - 4 \cdot \sum_{i=1}^{m-3} i$$

Permutationen p'' , die durch drei verschiedene Möglichkeiten der Ausführung von Transformationen des Typs (I) und (II) entstehen können sowie

$$z_4 = \sum_{i=1}^{m-3} i + m - 3$$

Permutationen p'' , die durch vier verschiedene Möglichkeiten der Ausführung von Transformationen des Typs (I) und (II) entstehen können. Man erhält somit insgesamt in diesem Fall

$$z_e = [|N(p, G^S \setminus G_V(m))| \cdot |N(p, G^S \setminus G_V(m-1))| + z_1 - z_2 - z_3 - 2z_4] / 2 = [(m-1) \cdot (m-2)^2 \cdot (m-3) - (2m-4) \cdot (2m-8) - 4 + (m-3) \cdot (m-4)] / 2$$

Permutationen. Daher ergibt sich

$$z_2(G^S(m)) = z_a + z_b + z_c + z_d + z_e = m^4/4 - 3m^3 + 11m^2/2 - 3m + 1 \text{ für } m \geq 4 \quad \text{q. e. d.}$$

Folgerung 1: Wegen $|N(p, 2-G^S(m))| = |N(p, G^S(m))| + z_2(G^S(m))$ ergibt sich unter Beachtung von $|N(p, G^S(m))| = (m-1)^2$ (vgl. [17] $|N(p, 2-G^S(m))| = m^4/4 - 3m^3 + 13m^2/2 - 5m + 2$ für $m \geq 4$). Somit repräsentiert $2-G^S(m)$ eine Nachbarschaft 4. Ordnung, d. h. es gibt $O(m^4)$ Nachbarn.

4. Zum Nachweis der Quasikonvexität ausgewählter Einmaschinenprobleme

In diesem Abschnitt werden spezielle Maschinenbelegungsprobleme folgender Gestalt betrachtet: m Aufträge $1, 2, \dots, m$ sind auf einer Maschine zu bearbeiten. Die Unterbrechung eines Auftrages ist nicht gestattet. Jedem Auftrag i kann eine Bearbeitungszeit $t_i \geq 0$, ein Fälligkeitstermin $d_i \geq 0$, ein Gewichtungsfaktor $w_i > 0$ und eine monoton nichtfallende Kostenfunktion f_i ($f_i(t)$ gibt die entstehenden Kosten an, wenn Auftrag i zur Zeit t fertiggestellt wird) zugeordnet werden. Zwischen den Aufträgen bestehen Vorrangbedingungen, d. h. vor Bearbeitungsbeginn eines bestimmten Auftrags muß die Bearbeitung von einem oder mehreren Aufträgen abgeschlossen sein. Die Beschreibung der Vorrangbedingungen kann mit Hilfe eines gerichteten Graphen erfolgen. Sei $\text{prec}(i)$ die Menge der unmittelbaren Vorgänger und $\text{succ}(i)$ die Menge der unmittelbaren Nachfolger von Auftrag i in diesem Präzedenzgraphen.

Jede Bearbeitungsreihenfolge kann durch eine Permutation $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in P_m$ der Aufträge charakterisiert werden. Bei gegebenem Plan $p \in P_m$ kann für jeden Auftrag i der Termin des Bearbeitungsendes $C_i(p)$, der Wert der Kostenfunktion $f_i(C_i(p)) = f_i(p)$ und der Terminüberschreitungsfaktor $U_i(p)$ mit

$$U_i(p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } C_i(p) \leq d_i \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet werden.

Jede Permutation wird mit Hilfe einer speziellen Zielfunktion bewertet. Es ist eine zulässige (mit den Vorrangbedingungen verträgliche) Bearbeitungsreihenfolge der Auf-

träge gesucht, die einen minimalen Zielfunktionswert aufweist.

Nachfolgend wird die Quasikonvexität von drei ausgewählten derartigen Einmaschinenproblemen nachgewiesen.

4.1. Das $[m | 1 | \text{prec} | f_{\max}]$ -Problem

Die Zielfunktion dieses Problems hat folgende Gestalt:

$$F(p) = f_{\max} = \max \{f_i(p) \mid 1 \leq i \leq m\}$$

Nach einer in [6] angegebenen Klassifikation für Maschinenbelegungsprobleme liegt das $[m | 1 | \text{prec} | f_{\max}]$ -Problem vor. Es gehört zur Klasse P .

In [8] wird ein $O(m^2)$ -Algorithmus zur Erzeugung einer Optimallösung angegeben.

Algorithmus I

- S0: Setze $l := m$; $M' := M$; $T := \Sigma \{t_i \mid i \in M\}$;
 S1: Bilde $R := \{i \in M' \mid \text{succ}(i) \cap M' = \emptyset\}$; Ermittle $j \in R$ mit $f_j(T) := \min \{f_k(T) \mid k \in R\}$; Setze $p^* := j$; $T := T - t_j$; $l := l - 1$; $M' := M' \setminus \{j\}$;
 S2: Falls $l > 0$ gehe zu S1;
 $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*) \in P_m$ ist eine Optimallösung!

Es kann folgende Aussage bewiesen werden:

Theorem 5: Das $[m | 1 | \text{prec} | f_{\max}]$ -Problem ist quasikonvex auf $G_r(m)$.

Beweis: Sei $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*) \in P_m$ die Optimallösung gemäß Algorithmus I und $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \neq p^*$ ein beliebiger zulässiger Plan. Es sei

$$l = \max \{k \in M \mid p_k \neq p_k^*\}. \quad (8)$$

Dann existiert ein $r < l$ mit $p_r^* = p_r = j$. Weiter sei $p^s = (p_1, \dots, p_{s-1}, j, p_{s+1}, \dots, p_{m-1})$ mit $r \leq s \leq l$ und $(p_1, \dots, p_{m-1}) = p \setminus j$. Es wird gezeigt, daß

$$f_{\max}(p^r) \geq f_{\max}(p^{r-1}) \geq \dots \geq f_{\max}(p^l) \quad (9)$$

gilt. Dazu werden p^s und p^{s+1} ($r \leq s \leq l-1$) betrachtet. Aufgrund der Monotonie der Kostenfunktion ist $f_j(p^{s+1}) \leq f_j(p^s)$ und wegen Schritt S1 im Algorithmus I gilt $f_j(p^s) \leq f_{p_s}(p^s)$. Daher gilt $f_j(p^{s+1}) \leq f_{p_s}(p^s) \leq f_{\max}(p^s)$, und für alle $i \in M \setminus \{j\}$ ist $f_i(p^{s+1}) \leq f_i(p^s)$, woraus $f_{\max}(p^s) \geq f_{\max}(p^{s+1})$ folgt. Jetzt sei $p := p^l$. Es wird erneut nach der beschriebenen Vorgehensweise verfahren, d. h. l gemäß (8) bestimmt usw., bis p^* erhalten wird. Entlang der so entstehenden Kette $K[p, p^*]$ ist der Zielfunktionswert wegen (9) monoton nichtwachsend.

q. e. d.

4.2. Das $[m | 1 | \text{tree} | \Sigma w_i C_i]$ -Problem

In diesem Abschnitt wird das Einmaschinenproblem mit der Zielfunktion „Summe der gewichteten Bearbeitungs- endtermine“

$$F(p) = \sum_{i=1}^m w_i C_i(p)$$

untersucht. Fälligkeitstermine werden nicht betrachtet. Gelten bzgl. der Vorrangbedingungen keine weiteren Einschränkungen, so gehört dieses Problem zur Klasse NP-hard.

Sei im weiteren $|\text{prec}(i)| \leq 1$, $i=1, \dots, m$, d. h. der Graph der Vorrangbedingungen sei ein Wald. Für das als $[m | 1 | \text{tree} | \Sigma w_i C_i]$ -Problem bezeichnete Maschinenbelegungsproblem existiert ein $O(m \log m)$ -Lösungsalgorithmus (vgl. z. B. [3], der nachfolgend angegeben wird. Zuvor wird noch eine Bezeichnung benötigt. Sei $B = \{p_i, p_{i+1}, \dots, p_j\}$, $1 \leq i \leq j \leq m$, ein Block von Elementen einer Permutation

$p \in P_m$. Für B sei $q(B) = w(B)/t(B)$ mit

$$w(B) = \Sigma \{w_k \mid k \in B\} \text{ und } t(B) = \Sigma \{t_k \mid k \in B\}.$$

Algorithmus II

- S0: Setze $M' := M$; $1 := m$;
 S1: Ermittle $j \in M'$ mit $q(j) := \max \{q(k) \mid k \in M'\}$;
 S2: Falls $\text{prec}(j) = \emptyset$ gehe zu S3;
 Für $i \in M'$ mit $\text{prec}(j) = \{i\}$ bilde Element ij mit $t_{ij} := t_i + t_j$; $w_{ij} := w_i + w_j$ (entspricht einem Block $B = \{i, j\}$ mit $t(B)$ und $w(B)$); Setze $M' := M' \setminus \{i, j\} \cup \{ij\}$; $l := l - 1$;
 $\text{prec}(ij) := \text{prec}(i)$; Gehe zu S4;
 S3: Ordne j beginnend an der ersten freien Position in p^* an (j kann ein Block aus mehreren Elementen sein!); Setze $l := l - 1$; $M' := M' \setminus \{j\}$;
 S4: Falls $l > 0$ gehe zu S1;
 $p^* \in P_m$ ist eine Optimallösung!

Zum Nachweis der Quasikonvexität des Problems wird folgendes Blockvertauschungslemma benötigt, das in [3] bewiesen wird:

Lemma 1: Eine Permutation $p' \in P_m$ entstehe durch eine (B_1, B_2) -Blockvertauschung mit $|B_i| \geq 1$ ($i=1, 2$) aus $p \in P_m$. Dann gilt $F(p') \leq F(p)$ genau dann, wenn $q(B_2) \geq q(B_1)$ ist.

Damit kann folgendes Theorem bewiesen werden:

Theorem 6: Das $[m | 1 | \text{tree} | \Sigma w_i C_i]$ -Problem ist quasikonvex auf $G^{BL}(m)$.

Beweis: Es reicht aus, in $G^{BL}(m)$ die Existenz einer einfachen Kette von einer beliebigen zulässigen Lösung $p \in P_m$ zur Optimallösung $p^* \in P_m$ gemäß Algorithmus II zu zeigen, entlang derer der Zielfunktionswert monoton nichtwachsend ist.

Sei $j \in M$ mit $q(j) = \max \{q(k) \mid k \in M\}$. Ferner sei $s = \text{Po}(p, j)$. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Falls $\text{prec}(j) = \emptyset$ ist, so wird für $s > 1$ eine neue Permutation p' aus p durch eine (B_1, B_2) -Blockvertauschung mit $B_1 = \{p_1, \dots, p_{s-1}\}$ und $B_2 = \{p_s\}$ erhalten. Wegen $q(B_2) \geq q(B_1)$ folgt aus Lemma 1, daß $F(p') \leq F(p)$ ist. Sei dann $M' := M \setminus \{j\}$.

b) Sei $\{i\} = \text{prec}(j)$ mit $\text{Po}(p, i) = r$. Im Falle $s > r + 1$ entsteht p' durch eine (B_1, B_2) -Blockvertauschung mit $B_1 = \{p_{r+1}, \dots, p_{s-1}\}$ und $B_2 = \{p_s\}$ aus p . Auch hier gilt $F(p') \leq F(p)$ wegen $q(B_2) \geq q(B_1)$. Es werden die Elemente i und j zu einem Element ij (Block $\{i, j\}$) vereinigt, und es sei $M' := M \setminus \{i, j\} \cup \{ij\}$.

Sei $p := p'$. Das beschriebene Vorgehen wird anschließend mit der Menge M' wiederholt usw., bis p^* erhalten wird. Dabei ist zu berücksichtigen, daß im Fall a) das erste Element des Blockes B_1 durch p_i mit $l = \min \{k \in M \mid p_k \neq p_k^*\}$ gebildet wird. Da das ausgewählte Element j ein Block aus mehreren Elementen sein kann, entspricht der Übergang von p zu p' einem Übergang zu einem Nachbarn in $G^{BL}(m)$.

q. e. d.

4.3. Das $[m | 1 | \Sigma w_i U_i]$ -Problem

Als Zielfunktion wird die Minimierung der Summe der gewichteten Terminüberschreitungsfaktoren betrachtet:

$$F(p) = \sum_{i=1}^m w_i U_i(p)$$

Dabei sei $\text{prec}(i) = \emptyset$ für $i=1, \dots, m$. Dieses $[m | 1 | \Sigma w_i U_i]$ -Problem gehört zur Klasse NP-hard.

Für die weiteren Betrachtungen wird zusätzlich vorausgesetzt, daß aus $t_i < t_j$ die Beziehung $w_i \geq w_j$ für $1 \leq i, j \leq m$

folgt. Für diese Teilklasse wird in [20] ein $O(m \log m)$ -Algorithmus zur Bestimmung einer Optimallösung angegeben. Im weiteren bezeichne $C(p)$ das Bearbeitungsende des letzten Auftrags eines Plans $p \in P_m$ und $p(L) = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ eine Permutation der Elemente einer gegebenen Menge $L \subseteq M$ von Aufträgen mit $d_{p_1} \leq d_{p_2} \leq \dots \leq d_{p_l}$.

Algorithmus III

- S0: Setze $p := p(M)$; $S^* := \emptyset$;
 S1: Falls Element p_k von p mit $C_{p_k}(p) \leq d_{p_k}$ für $1 \leq i \leq k-1$ und $C_{p_k}(p) > d_{p_k}$ existiert, setze $K := \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ und gehe zu S2;
 Setze $R^* := M \setminus S^*$; $p^* = (p(R^*), p(S^*))$ ist eine Optimallösung!
 S2: Ermittle $l \in K$ mit $t_l = \max\{t_i \mid i \in K\}$ und $w_l = \min\{w_i \mid i \in K\}$; Setze $S^* := S^* \cup \{l\}$; $p := p \setminus l$; Gehe zu S1;

Dem Nachweis der Quasikonvexität der Teilklasse des betrachteten Problems werden noch drei Bemerkungen vorangestellt.

Bemerkung 1: Sei $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in P_m$ eine beliebige Lösung, bei deren Abarbeitung ein Auftrag p_k mit $k \in M \setminus \{m\}$ verspätet fertig wird. Für eine Permutation $p' = V_{k,l}(p)$ mit $k < l$ gilt $F(p') \leq F(p)$.

Bemerkung 2: Sei $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in P_m$ gegeben. Es existiere ein $k \in M \setminus \{m\}$ mit $C_{p_k}(p) \leq d_{p_k}$, $C_{p_{k+1}}(p) \leq d_{p_{k+1}}$ und $d_{p_k} > d_{p_{k+1}}$.

Für eine Permutation $p' = V_{k,k+1}(p)$ folgt $F(p') = F(p)$ wegen

$$C_{p_{k+1}}(p') < C_{p_k}(p') = C_{p_{k+1}}(p) \leq d_{p_{k+1}} < d_{p_k}$$

Bemerkung 3: Sei $l \in K$ der in einem Schritt S2 des Algorithmus III ermittelte Auftrag. Dann wird bei Bearbeitung von $p(K) \setminus l$ kein Auftrag verspätet fertig, da für $P_o(p(K), l) < k$ folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} C_{p_k}(p(K) \setminus l) &= C(p(K) \setminus l) \leq C(p(K) \setminus p_k) \\ &= C_{p_{k-1}}(p(K)) \leq d_{p_{k-1}} \leq d_{p_k} \end{aligned}$$

Dann kann folgendes Theorem bewiesen werden.

Theorem 7: Die betrachtete Teilklasse des $[m \mid 1 \mid |\Sigma w_i U_i]$ -Problems ist quasikonvex auf $2-G^S(m)$.

Beweis: Erneut wird die Existenz einer einfachen Kette $K[p, p^*]$ zwischen einer beliebigen Lösung $p \in P_m$ und der Optimallösung $p^* \in P_m$ gemäß Algorithmus III nachgewiesen, entlang derer der Zielfunktionswert monoton nicht-wachsend ist.

Die Permutation $p \in P_m$ kann ohne Zielfunktionswertvergrößerung durch Transformationen in $G^S(m)$ gemäß Bemerkung 1 und anschließende Nachbarvertauschungen gemäß Bemerkung 2 in eine Permutation der Gestalt $p^1 = (p(R^1), p(S^1))$ überführt werden, wobei bei Bearbeitung von p^1 die Aufträge aus R^1 rechtzeitig und die aus S^1 verspätet fertig werden. Dabei ist insbesondere $R^1 \cong \{i \in M \mid C_i(p) \leq d_i\}$.

Sei j der erste vom Algorithmus III in die Menge S^* aufgenommene Auftrag mit $j \in R^1 \cap S^*$. Zu diesem j gab es im Verlauf des Algorithmus III eine Menge K mit $p(K) = (p_1, p_2, \dots, j, \dots, p_k)$, $C_{p_i}(p(K)) \leq d_{p_i}$ für $1 \leq i \leq k-1$, $C_{p_k}(p(K)) > d_{p_k}$ und $t_j = \max\{t_i \mid i \in K\}$ sowie $w_j = \min\{w_i \mid i \in K\}$. Mit Hilfe von K wird R^1 in $R_1^1 = R^1 \cap K$ und $R_2^1 = R^1 \setminus K$ zerlegt. Aufgrund der speziellen Wahl des Elements $j \in R^1 \cap S^*$ ist $d_{p_k} \leq d_r$ für $r \in R_2^1$ und damit $p(R^1) = (p(R_1^1), p(R_2^1))$.

Es gilt $\emptyset \subset R_1^1 \subseteq K$. Bei Bearbeitung des Plans $p(R_1^1)$ werden alle Aufträge rechtzeitig fertig, während $C_{p_k}(p(K)) > d_{p_k}$ ist. Daher folgt $R_1^1 \subset K$, d. h. es existiert ein $h \in K$ mit $h \notin R_1^1$.

Wegen $R_2^1 = R^1 \setminus K$ gilt daher $h \in S^1$. Sei jetzt $R^2 = R^1 \cup \{h\} \setminus \{j\}$ und $S^2 = S^1 \setminus \{j\} \cup \{h\}$. Die Permutation $p^2 = (p(R^2), p(S^2))$ kann aus p^1 durch eine Rechtsverschiebung des Elementes j und eine anschließende Linksverschiebung von h (spezielle Transformationen in $G^S(m)$) entstehen. Daher sind p^1 und p^2 Nachbarn in $2-G^S(m)$.

Wegen $d_h \leq d_{p_k}$ und $d_{p_k} \leq d_r$ für alle $r \in R_2^1$ hat $p(R^2)$ die Gestalt $p(R^2) = (p(R_1^2), p(S^2))$, mit $R_1^2 = R_1^1 \cup \{h\} \setminus \{j\}$ und $R_2^2 = R_2^1$. Wegen $R_1^2 \subseteq K \setminus \{j\}$ und Bemerkung 3 werden alle Aufträge bei Bearbeitung des Plans $p(R_1^2)$ rechtzeitig fertig. Zugleich kann sich wegen $t_h \leq t_j$ kein Auftrag aus R_2^2 neu verspäten. Da auch $w_h \geq w_j$ ist, folgt $F(p^2) \leq F(p^1)$.

Aufgrund der Bemerkungen 1 und 2 kann gegebenenfalls p^2 ohne Zielfunktionswertvergrößerung in eine Permutation $p^3 = (p(R^3), p(S^3))$ überführt werden, wobei bei Bearbeitung von p^3 die Aufträge aus R^3 rechtzeitig und die aus S^3 verspätet fertig werden.

Ist jetzt $R^3 \wedge S^* \neq \emptyset$, so wird das beschriebene Vorgehen mit der Permutation $p^1 := p^3$ wiederholt.

Sei $R^3 \cap S^* = \emptyset$ und $|R^3| < |R^*|$. Dann existiert ein $l \in S^3 \cap R^*$. Die Permutation $p^4 = (p(R^3 \cup \{l\}), p(S^3 \setminus \{l\}))$ entsteht durch eine Linksverschiebung des Elementes l aus p^3 . Für sie ist $F(p^4) < F(p^3)$. Es wird weiter nach der beschriebenen Vorgehensweise verfahren, bis die Optimallösung p^* erhalten wird.

q.e.d.

LITERATUR

- [1] Adolphson, D. L.: Single machine job sequencing with precedence constraints. SIAM-Journal on Computing, 6, 1977, 40-54.
- [2] Blümel, E.: Zur Quasikonvexität spezieller Permutationsprobleme. Dissertation A, TH Magdeburg, 1985.
- [3] Boenchedorf, K.: Reihenfolgeprobleme/Mean-Flow-Time-Sequencing, Athenäum, 1982.
- [4] Brucker, P.: Scheduling. Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden, 1981.
- [5] Girlich, E.; Kowaljow, M. M.: Nichtlineare diskrete Optimierung. Akademie-Verlag Berlin, 1981.
- [6] Graham, R. L.; Lawler, E. L.; Lenstra, J. K.; Rinnooy Kan, A. H. G.: Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey. Annals of Discrete Mathematics, 5, 1979, 287-326.
- [7] Johnson, S. M.: Optimal two- and three stage production schedules with setup times included. Naval Research Logistics Quarterly, 1, 1954, 61-68.
- [8] Lawler, E. L.: Optimal sequencing of a single machine subject to precedence constraints, Management Science, 19, 1973, 544-546.
- [9] Lugowski, H.; Weinert, H.: Grundzüge der Algebra. BSG B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1968.
- [10] Moore, J. M.: An n job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of late jobs. Management Science, 15, 1968, 102-109.
- [11] Muchow, D.: Ausgewählte Strukturuntersuchungen spezieller Permutationsprobleme. Proceedings der 18. Jahrestagung „Mathematische Optimierung“ Rostock/Diedrichshagen, 1986, 70-78.
- [12] Papadimitriou, C. H.; Steiglitz, K.: Combinatorial optimization: Algorithms and complexity. Prentice Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [13] Savage, S. L.: Some theoretical implications of local optimization. Mathematical Programming, 10, 1976, 354-366.
- [14] Savage, S. L.; Weiner, P.; Bagchi, A.: Neighborhood search algorithms for guaranteeing optimal traveling salesman tours must be inefficient. Journal of Computer and System Sciences, 12, 1976, 25-35.

- [15] *Seiffart, E.*: Zur Struktur von Graphen zum Zuordnungspolyeder. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg* 26 (1982) S. 49–54.
- [16] *Seiffart, E.*: Quasikonvexe Funktionen in der Permutationsoptimierung. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg* 29 (1985) 85–88.
- [17] *Werner, F.*: Zu einigen Nachbarschaftsgraphen für die Entwicklung geeigneter Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung eines speziellen Reihenfolgeproblems, *Wiss. Z. Techn. Univ. Magdeburg* 31 (1987) S. 48–54.
- [18] *Werner, F.*: On the quasiconvexity of a special job shop scheduling problem. *Wiss. Z. Techn. Univ. Magdeburg* 31 (1987) S. 43–47.
- [19] *Werner, F.*: Zu einigen Nachbarschaftsstrukturen für Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung spezieller Reihenfolgeprobleme. *Optimization*, 19, 1988, 539–556.
- [20] *Танаев, В. С. и др.*: Теория расписаний – Одностадийные системы, Москва, 1984.